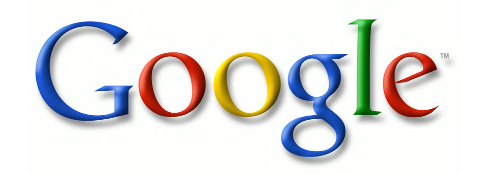
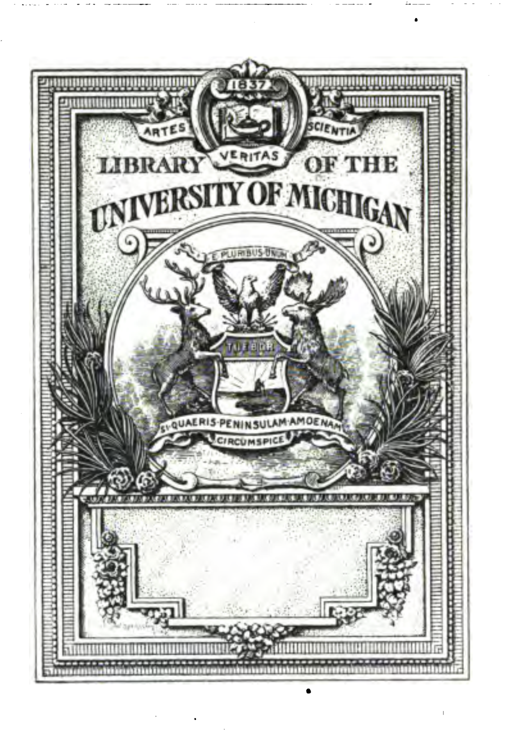



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques, Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

3e SÉRIE

TOME QUATRIÈME

Année 1890.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1890

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

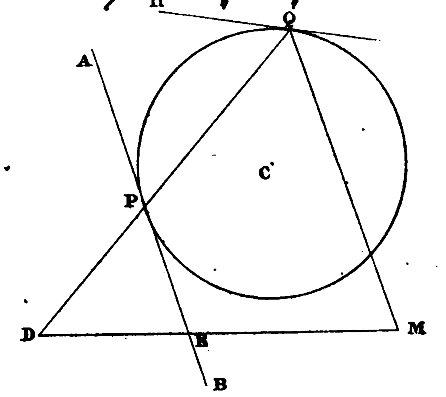
LE THÉORÈME DE FEUERBACH (*)

1. Lemme. — *Soit* AB *une tangente fixe à un cercle donné* Γ. *Par un point extérieur* D, *on mène une* ~~*tangente*~~ *qui rencontre* AB *en* E.

Ayant pris, sur cette droite, un point M, *tel que*

$$DE \times DM = K^2$$

(K^2 étant la puissance du point D par rapport au cercle Γ) *le lieu du point* M *est une circonférence, passant en* D, *et tangente à* Γ.



Soit P le point de contact de la tangente AB, la droite DP rencontre Γ en un second point Q; et l'on a

$$DE \times DM = DP \times DQ.$$

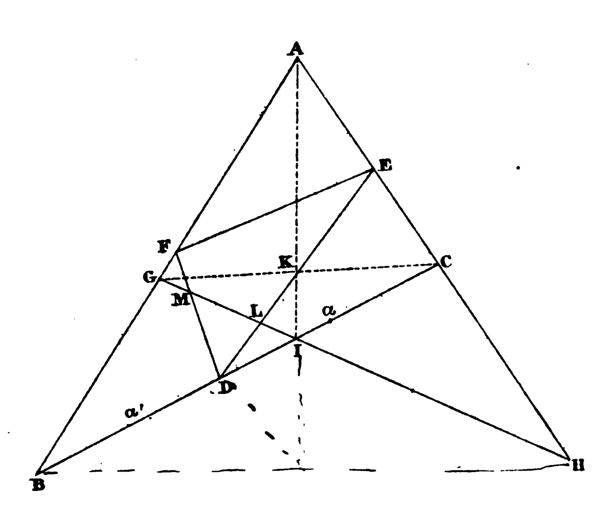
Ainsi, le quadrilatère EPQM est inscriptible; par suite :

$$\widehat{DMQ} = \widehat{APQ} = \widehat{PQA}.$$

On conclut de là que le point M est sur une circonférence passant par les points fixes D, Q et touchant, en Q, la circonférence donnée Γ.

(*) Cette démonstration, très élégante, est due à M. Milne; elle nous a été communiquée par M. Lalbalétrier.

2. Soit, dans le triangle ABC, Δ le cercle inscrit. Soit Δ_a le cercle ex-inscrit qui touche le côté BC et les prolongements des côtés AB, AC. On sait que les points de contact de ces deux cercles avec le côté BC sont deux points isotomiques α et α'.



Les côtés du triangle sont des tangentes communes aux cercles Δ, Δ_a. La quatrième tangente est une certaine droite GH, obtenue en prenant

$$AG = AC, \qquad AH = AB.$$

Ainsi, la bissectrice AI de l'angle A est perpendiculaire au milieu K de CG.

Soient D, E, F les milieux des côtés du triangle ABC. La droite DE passe en K. Ainsi :

$$D\alpha = D\alpha' = \frac{1}{2}(BA - AC) = \frac{1}{2}BG = DK.$$

Mais DE est parallèle à AB; donc :

$$\frac{DL}{DK} = \frac{BG}{BA} = \frac{DK}{DE};$$

d'où $$DL \times DE = \overline{DK}^2 = \overline{D\alpha}^2 = \overline{D\alpha'}^2.$$

De même, $$DM \times DF = \overline{DK}^2 = \overline{D\alpha}^2 = \overline{D\alpha'}^2.$$

En appliquant le lemme précédent, on voit que les points

E et F sont situés sur une circonférence passant en D et tangente aux cercles Δ, Δ_a.

De là résulte le théorème de Feuerbach : *le cercle inscrit et les cercles ex-inscrits sont tangents au cercle des neuf points* (*).

SUR LA FORMULE DE WARING

(ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ)

Par M. **Lalbalétrier.**

1. Préliminaires. — On sait qu'une *fonction symétrique* de plusieurs lettres, est une expression qui ne change pas lorsqu'on permute ces lettres deux à deux, de toutes les manières possibles.

Soit
$$x^2 - px + q = 0,$$
une équation du second degré, dont les racines x_1, x_2 vérifient les relations :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = p, \\ x_1x_2 = q. \end{cases}$$

Nous nous proposons, dans cette Note, de déterminer les fonctions symétriques de x_1, x_2, au moyen des coefficients p, q.

Nous remarquerons d'abord que le calcul d'une fonction algébrique symétrique, quelconque d'ailleurs, des racines x_1, x_2, peut se ramener à celui de la quantité
$$x_1^{m+n}x_2^n + x_1^nx_2^{m+n},$$
expression dans laquelle m, n désignent des nombres entiers positifs. En effet, une fonction symétrique algébrique est le quotient de deux fonctions symétriques, entières, de même forme.

En observant que
$$x_1^nx_2^n(x_1^m + x_2^m) = q^n(x_1^m + x_2^m),$$
on voit qu'il suffit de chercher la valeur de
$$S_m = x_1^m + x_2^m.$$

(*) Voyez une autre démonstration (*Journal*, 1886, p. 3).

2. Formule de récurrence entre S_m, S_{m-1}, S_{m-2}. — Les égalités

$$\begin{cases} x_1^2 - px_1 + q = 0, \\ x_2^2 - px_2 + q = 0, \end{cases}$$

donnent
$$\begin{cases} x_1^{m+1} - px_1^m + qx_1^{m-1} = 0, \\ x_2^{m+1} - px_2^m + qx_2^{m-1} = 0; \end{cases}$$

et, par suite,

$$(1) \qquad S_{m+1} - pS_m + qS_{m-1} = 0.$$

Telle est la formule, bien connue, qui permet de calculer par voie récurrente, les fonctions S_m, connaissant les deux premières S_0, S_1,

$$S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2, \qquad S_1 = x_1 + x_2 = p.$$

mais la formule (1) ne conduit pas facilement à l'expression générale de S_m, en fonction des coefficients p et q. Pour l'obtenir, nous opérons comme nous allons l'indiquer.

3. Principe de la méthode. — Considérons les équations simultanées :

$$(2) \qquad \begin{cases} x^2 - px + q = 0, \\ y = x^m. \end{cases}$$

Imaginons qu'on élimine x, entre ces deux équations. La première, ayant pour racines x_1, x_2, la seconde donnera pour y les deux valeurs :

$$\begin{cases} y_1 = x_1^m, \\ y_2 = x_2^m. \end{cases}$$

Ainsi, l'équation résultante en y sera du second degré. Nous la représenterons sous la forme

$$(3) \qquad y^2 - Py + Q = 0,$$

et nous aurons

$$P = y_1 + y_2 = x_1^m + x_2^m = S_m.$$

Nous trouverons donc, d'après cela, la quantité inconnue S_m, en éliminant x entre les équations (2).

4. Examen préalable d'un cas particulier. — Pour mieux faire saisir la méthode d'élimination que nous allons employer, nous traiterons d'abord un cas particulier.

Soient les équations :

$$\begin{cases} x^2 - px + q = 0, \\ y = x^5. \end{cases}$$

Nous avons : $$px = x^2 + q;$$
ou, en posant, pour simplifier l'écriture, $x^2 = z$:
$$px = z + q.$$
Élevons successivement aux puissances 5 et 3, les deux membres de cette égalité, nous pourrons écrire :
$$\begin{aligned} p^5x^5 &= z^5 + 5qz^4 + 10q^2z^3 + 10q^3z^2 + 5q^4z + q^5, \\ p^3x^3 &= z^3 + 3qz^2 + 3q^2z + q^3, \\ px &= z + q. \end{aligned}$$
Observons alors que, dans les seconds membres de ces trois égalités, les coefficients des termes à égale distance des extrêmes étant égaux, si l'on multiplie les deux membres de la première par $+1$, les deux membres de la seconde par $-5qz$, et enfin les deux membres de la troisième par $+5q^2z^2$, et si l'on ajoute les résultats obtenus, il vient :
$$x^5(p^5 - 5p^3q + 5pq^2) = z^5 + q^5.$$
Mais on a : $$x^5 = y, \qquad z^5 = y^2,$$
et, par suite,

(4) $$y^2 - (p^5 - p^3q + pq^2)y + q^5 = 0.$$
Dans le cas qui nous occupe, nous avons donc :
$$\mathrm{P} = \mathrm{S}_5 = p^5 - 5p^3q + 5pq^2.$$

5. Formule générale. — La méthode que nous venons de suivre est générale ; elle va nous permettre d'éliminer x entre les équations (2).

En effet, la formule du binôme de Newton nous donne
$$\begin{aligned} p^m x^m &= z^m + \frac{m}{1}qz^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}q^2z^{m-2} + \ldots + \frac{m(m-1)}{1.2}q^{m-2}z^2 + \frac{m}{1}q^{m-1}z + q^m \\ p^{m-2}x^{m-2} &= z^{m-2} + \frac{m-2}{1}q\,z^{m-3} + \ldots + \frac{m-2}{1}q^{m-3}z + q^{m-2} \\ p^{m-4}x^{m-4} &= z^{m-4} + \ldots + q^{m-4} \end{aligned}$$
. . . .

Pour faire disparaître toutes les puissances de z, sauf z^m, nous ajouterons d'abord, membre à membre, les deux premières équations, après avoir multiplié la seconde par $-mqx$. Nous avons ainsi :
$$x^m\left(p^m - \frac{m}{1}p^{m-2}q\right) = z^m - \frac{m(m-3)}{1.2}q^2z^{m-2} - \frac{m(m-2)(m-4)}{1.3}q^3z^{m-3} - \ldots$$
A ce premier résultat, ajoutons la troisième équation, après

avoir multiplié les deux membres par $\frac{m(m-3)}{1.2}q^2x^2$; il vient

$$x^m(p^m-\frac{m}{1}p^{m-2}q+\frac{m(m-3)}{1.2}p^{m-4}q^2)=z^m+\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}q^3z^{m-3}+\dots$$

En continuant ainsi et en tenant compte des relations $x^m = y$, $z^m = y^2$, nous trouvons finalement,

$$y^2 - y(p^m - \frac{m}{1}p^{m-2}q + \frac{m(m-3)}{1.2}p^{m-4}q^2 \dots) + q^m = 0,$$

et, par conséquent,

(5)
$$S_m = p^m - \frac{m}{1}p^{m-2}q + \frac{m(m-3)}{1.2}p^{m-4}q^2 - \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}p^{m-6}q^3 + \dots$$

C'est la formule générale que nous voulions établir.

6. — Dans le calcul précédent, nous nous sommes contentés de chercher les premiers termes du développement de S_m, pour reconnaître la forme du terme général T, de ce développement; nous allons montrer que la formule (5) est bien l'expression cherchée de la fonction S_m. Nous supposerons, à cet effet, qu'elle est exacte pour deux valeurs entières consécutives $n-1$, n, de l'exposant m, et nous prouverons qu'elle s'applique encore à la valeur $m = n + 1$.

Le terme général de la formule (5) peut s'écrire

$$T = (-1)^\lambda \frac{m(m-\lambda-1)(m-\lambda-2)\dots(m-2\lambda+1)}{1.2.3\dots\lambda} p^{m-2\lambda}q^\lambda,$$

λ prenant toutes les valeurs entières, de 1 à $\frac{m}{2}$.

Posons, conformément à l'hypothèse que nous avons faite,

$$S_n = p^n - \frac{n}{1}p^{n-2}q + \frac{n(n-3)}{1.2}p^{n-4}q^2 - \dots$$
$$+ (-1)^\lambda \frac{n(n-\lambda-1)\dots(n-2\lambda+1)}{1.2.3\dots\lambda} p^{n-2\lambda}q^\lambda + \dots$$

$$S_{n-1} = p^{n-1} - \frac{n-1}{1}p^{n-3}q - \dots$$
$$+ (-1)^{\lambda-1} \frac{(n-1)(n-\lambda-1)\dots(n-2\lambda+2)}{1.2.3\dots(\lambda-1).} p^{n-2\lambda+1}q^{\lambda-1} + \dots$$

La formule $\qquad S_{n+1} = p\,S_n - q\,S_{n-1}$

donne

$$S_{n+1} = p^{n+1} \begin{array}{r|l|l|l} -\frac{n}{1} & p^{n-1}q + \frac{n(n-3)}{1.2} & p^{n-3}q^2 - \ldots \pm \frac{n(n-\lambda-1)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda} & p^{n-2\lambda+1}q^\lambda + \ldots; \\ -1 & \quad + \frac{n-1}{1} & \pm \frac{(n-1)(n-\lambda-1)\ldots(n-2\lambda+2)}{1.2.3\ldots(\lambda-1)} & \end{array}$$

ou, après réductions,

$$S_{n+1} = p^{n+1} - \frac{n+1}{1} p^{n-1}q + \frac{(n+1)(n-2)}{1.2} p^{n-3}q^2 - \ldots$$

$$+ (-1)^\lambda \frac{(n+1)(n-\lambda)\ldots(n-2\lambda+2)}{1.2.3\ldots\lambda} p^{n-2\lambda+1}q^\lambda + \ldots$$

En posant $n + 1 = m$, on a

$$S_m = p^m - \frac{m}{1} p^{m-2}q + \frac{m(m-3)}{1.2} p^{m-4}q^2 - \ldots$$

c'est-à-dire la formule (5). Cette formule étant vérifiée pour $m = 1$ et pour $m = 2$, on voit qu'elle est générale et qu'elle s'applique à toutes les valeurs entières, positives, de m (*).

7. Calcul de S_{-m}. — L'expression de S_{-m} se déduit, sans difficulté, de celle de S_m. En effet, on a

$$S_{-m} = \frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} = \frac{x_1^m + x_2^m}{x_1^m x_2^m};$$

et, par suite,

(6) $$q^m S_{-m} = S_m.$$

8. Calcul de $x_1^m - x_2^m$. — Nous pouvons aussi déduire des résultats précédents la différence

$$x_1^m - x_2^m.$$

Supposons d'abord que m soit impair : $m = 2n + 1$. Nous avons

$$x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1} = (x_1 - x_2)(x_1^{2n} + x_1^{2n-1}x_2 + \ldots + x_1x_2^{2n-1} + x_2^{2n});$$

ou, en posant $x_1 - x_2 = d = \sqrt{p^2 - 49}$:

(*) On trouvera, dans l'*Algèbre supérieure de Serret* (pp. 240 et 449, 4e édition), d'autres démonstrations de cette formule, mais elles exigent des notions algébriques supérieures. M de Longchamps a donné, de son côté (*Algèbre*, première édition, p. 141) une démonstration de la formule de Waring, démonstration qui, comme celle que nous proposons ici, a l'avantage de ne prendre pour base que des considérations élémentaires.

(7)
$$x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1} = d(S_{2n} + qS_{2n-2} + q^2S_{2n-4} + \ldots + q^{n-1}S_2 + q^n)$$

Supposons, au contraire, que m soit pair. Si l'on pose $m = 2m'$, on a
$$x_1^m - x_2^m = (x_1^{m'} + x_2^{m'})(x_1^{m'} - x_2^{m'}).$$

Si m_1 est impair, on est ramené au cas précédent; si m' est pair, on décompose la différence $x_1^{m'} - x_2^{m'}$ en deux facteurs, etc.

Nous allons présenter, maintenant, quelques applications de la formule de Waring.

(A suivre)

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE
$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$,

Par M. E. Pomey.

Je démontrerai cette formule, seulement dans le cas où les angles A et B sont inférieurs, chacun, à 90°. On sait en effet comment elle se généralise, après avoir été établie dans cette hypothèse.

Prenons un segment de droite AB. Par les extrémités A et B, menons du même côté de AB, deux semi-droites AC, BC, faisant, la première, l'angle A avec la direction AB; la seconde, l'angle B avec la direction BA. Ces deux semi-droites se coupent en un point C. Désignons par a, b, c les côtés du triangle ainsi formé. On a les relations (*):
$$c = a \cos B + b \cos A,$$
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$
et, par suite,
$$\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

(*) Il faut noter que ces égalités peuvent être établies au début de la Trigonométrie, dès que l'on a donné la définition des lignes trigonométriques des angles.

Or, les angles C et A + B, sont supplémentaires; on a donc

$$\sin C = \sin (A + B);$$

et, finalement,

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

THÉORÈMES SUR LES TRANSVERSALES (*)

Par M. **E. Lauvernay**, professeur au Lycée de Caen.

Théorème premier. — *Si, par un point quelconque* O *du plan d'un triangle* ABC, *on mène une transversale arbitraire* A'B'C', *on a*

$$\frac{aa'}{\alpha} + \frac{bb'}{\beta} + \frac{cc'}{\gamma} = 0 \ (^{**}).$$

Menons les perpendiculaires AE, BD, CF sur la transversale. Avec les conventions faites, on a

$$aa' = OA'(BD + CF)$$
$$= -\alpha(BD + CF).$$

On trouve, de même :

$$bb' = OB'(CF - AE)$$
$$= \beta(CF - AE),$$
$$cc' = OC'(BD + AE)$$
$$= \gamma(BD + AE).$$

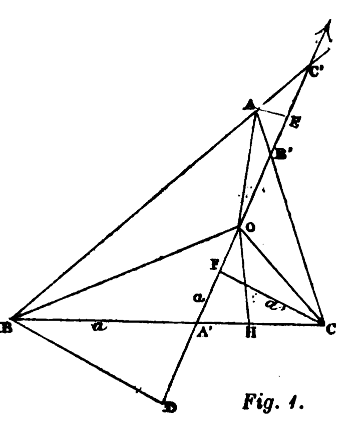


Fig. 1.

(*) Le présent article renferme une démonstration nouvelle du théorème donné par M. Plamenewsky (*Journal*, 1888, p. 89) et une généralisation de ce théorème. G. L.

(**) Dans cette égalité, a, b, c représentent les côtés du triangle ABC; a', b', c' les distances du point O à chacun des côtés, celles-ci étant de même signe ou de signes contraires selon que les côtés du triangle tendent à tourner dans le même sens, ou en sens contraire, autour du point O, supposé fixe. On considère, d'ailleurs, ces distances comme des bras de levier et chacun des côtés AB, BC, CA du triangle, représente, en direction et en grandeur, des forces appliquées à chacun de ces leviers. Enfin, α, β, γ sont les *longueurs algébriques* des segments OA', OB', OC'.

Donc :
$$-(\mathrm{BD}+\mathrm{CF})=\frac{aa'}{\alpha},$$
$$\mathrm{CF}-\mathrm{AE}=\frac{bb'}{\beta},$$
$$\mathrm{BD}+\mathrm{AE}=\frac{cc'}{\gamma};$$
et, par suite,
$$\frac{aa'}{\alpha}+\frac{bb'}{\beta}+\frac{cc'}{\gamma}=0.$$

Le lecteur vérifiera sans peine que cette relation subsiste, quelles que soient la transversale et la position du point O situé sur celle-ci.

D'après les conventions faites, concernant les signes, si a, b, c, d... sont les longueurs des côtés successifs AB, BC, CD,... d'un polygone; a', b', c',... les distances algébriques d'un point O à ces côtés; α, β, γ... les longueurs algébriques des segments OA′, OB′, OC′, déterminées par une transversale arbitraire passant par O, par les côtés successifs AB, BC, CD..., on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème général. — *Si, par un point quelconque* O *du plan d'un polygone, on mène une transversale arbitraire, on a la relation*
$$\Sigma\left(\frac{aa'}{\alpha}\right)=0,$$
le signe Σ *s'étendant à tous les côtés du polygone.*

Supposons la proposition vraie pour un polygone de n côtés, et montrons qu'elle existe encore pour un polygone de $n+1$ côtés.

Soit DF le dernier côté du premier polygone, DF étant le sens de la force représentée par ce côté; désignons par Σ_{n-1} la somme des rapports $\frac{aa'}{\alpha}$ relatifs aux $n-1$ premiers côtés; enfin, soient x, x', X les éléments relatifs à ce côté DF. On a
$$\Sigma_{n-1}+\frac{xx'}{\mathrm{X}}=0.$$

Or, si l'on considère *(fig. 2)* le même point O et la même

transversale OX'D'E' dans le triangle DEF, DE et EF étant deux nouveaux côtés, on a :

$$-\frac{xx'}{X}+\frac{dd'}{\delta}+\frac{ee'}{\varepsilon}=0,$$

car la direction de la force représentée par le côté DF a changé de signe.

D'où, par addition,

$$\Sigma_{n-1}+\frac{dd'}{\delta}+\frac{ee'}{\varepsilon}=0;$$

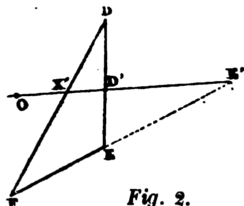


Fig. 2.

ce qui est la relation relative au polygone de $n+1$ côtés.

Ce théorème donne lieu à de nombreux corollaires, selon que le polygone présentera certaines particularités ou que l'on donnera au point O et à la transversale des positions particulières. Nous ne nous arrêterons qu'aux suivants, relatifs au triangle.

Si O est le centre de gravité du triangle, on a :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0;$$

car $$aa'=bb'=cc'=\frac{2S}{3}.$$

Si O est le sommet du parallélogramme construit sur deux côtés CA, CB du triangle, on a :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}=0;$$

car $$a'=h_a,\quad b'=h_b,\quad c'=-h_c.$$

Si O est le centre du cercle inscrit au triangle on a :

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=0.$$

Si O est le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle C, on a :

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}-\frac{c}{\gamma}=0.$$

Si O est le point de Lemoine, on a :

$$\frac{a^2}{\alpha}+\frac{b^2}{\beta}+\frac{c^2}{\gamma}=0.$$

Si O est le centre du cercle circonscrit au triangle, on a :

$$\frac{\sin 2A}{\alpha}+\frac{\sin 2B}{\beta}+\frac{\sin 2C}{\gamma}=0.$$

Enfin, si O est l'orthocentre du triangle :

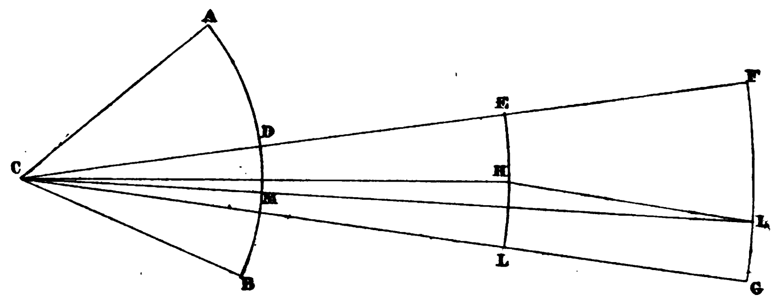
$$\frac{\operatorname{tg} A}{\alpha} + \frac{\operatorname{tg} B}{\beta} + \frac{\operatorname{tg} C}{\gamma} = 0.$$

SUR L'INSCRIPTION APPROCHÉE
DU NONAGONE (*) RÉGULIER (**)

Soit ACB, dans le cercle donné, un angle au centre de 60°. Traçons la bissectrice de ACB, et prenons

$$DE = EF = CD.$$

Menons encore la bissectrice CG de DCB et, de C comme centre, décrivons les arcs EL, FG. La bissectrice de FCG coupe l'arc EL en son milieu H. Par H traçons HI parallèle à



CG, et joignons le point I, où cette parallèle coupe l'arc FG au point C. L'angle ICG, ainsi obtenu, sera très approximativement égal au tiers de FCG ; c'est-à-dire à 5°. En résolvant le triangle HIC, on trouve

$$CIH = ICG = 4^\circ\, 59'\, 31'',37.$$

D'après cela $\qquad ACM = 40^\circ\, 0'\, 28'',63 ;$

la corde AM représente donc, avec une grande approximation, le côté du Nonagone régulier inscrit (***).

(*) Ou, préférablement, *Ennéagone;* comme nous l'a fait observer M. Catalan.

(**) Extrait d'un article du professeur H. A. Howe intitulé « L'INSCRIPTION APPROXIMATIVE DE CERTAINS POLYGONES RÉGULIERS », *Annals of mathematics;* vol. 5, n° 1 ; p. 12 (août 1889).

(***) Comparez avec les méthodes connues ; notamment avec celle de M. Henri Postula (CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, 6e édit. p. 283).

ÉTUDE
SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Aug. Morel.**

INTRODUCTION

Les sections coniques ont, de tous temps, attiré l'attention des Géomètres les plus célèbres. L'étude de ces courbes pénètre, comme l'on sait, dans les classes de Mathématiques élémentaires, où l'on s'occupe de quelques-unes des propriétés de deux d'entre elles, l'ellipse et la parabole. Mais la définition que l'on donne de ces courbes, par leurs propriétés focales, ne permet pas de les rattacher l'une à l'autre, au point de vue de la Géométrie pure.

L'importance que l'on donne dans les cours de mathématiques supérieures, à l'étude analytique des sections coniques, m'a déterminé à présenter, aux lecteurs du *Journal de Mathématiques élémentaires*, des aperçus purement géométriques sur ces courbes, considérées d'une façon plus générale. Je me suis, pour cela, inspiré des ouvrages classiques allemands et anglais; et, parmi ceux qui m'ont servi de guides, je signalerai les suivants :

Die Theorie der Kegelichnitte in elementar Darstellung, par Steiner. L'auteur définit les sections coniques : le lieu des points également distants d'un point fixe et d'un cercle fixe. Cette définition présente, au point de vue où je me place, l'inconvénient de ne pas montrer aux élèves de Mathématiques élémentaires, avec la simplicité nécessaire, comment on passe de l'ellipse à l'hyperbole d'une façon continue, avec la transition de la parabole.

Elementar synthetische Geometrie der Kegelschintle, par M. Milinowski. Cette étude fort complète s'appuie sur une théorie avec laquelle nos élèves ne sont pas assez familiarisés, puisque

l'auteur définit la section conique : la courbe polaire réciproque d'un cercle par rapport à un cercle. Le même auteur a publié une *Géométrie synthétique de l'hyperbole équilatère*, à laquelle, selon moi, on pourrait faire de nombreux emprunts si l'on voulait aborder l'étude géométrique de cette courbe intéressante.

Dans son ouvrage intitulé *Geometrical conic sections*, M. Jackson part de la définition adoptée par les anciens Géomètres; il considère la conique comme la section plane du cône droit.

Il en est de même de Booth, dans son grand ouvrage : *On some new geometrical methods*, où l'étude des sections coniques est le plus souvent traitée en empruntant les considérations de la Géométrie à trois dimensions.

Enfin, je rappellerai que, dans nos ouvrages classiques français, nous possédons une étude géométrique des sections coniques, dans le *Traité de géométrie* de M. E. Rouché. Cette étude très importante est faite en utilisant les principes et les propriétés de la géométrie moderne; et c'est pour cela que j'ai cru pouvoir aborder la question d'une façon différente, en appliquant seulement les connaissances que peut avoir un bon élève de Mathématiques élémentaires, n'ayant vu que la géométrie classique, telle que la présentent nos traités les plus connus, comme la Géométrie de Legendre, par exemple.

Mon but est donc de présenter ici une étude géométrique des propriétés les plus saillantes des sections coniques, en partant d'une définition commune aux trois courbes; sans autre secours que celui de la Géométrie pure.

Cette question, qui m'occupe depuis longtemps déjà, m'a semblé revenir à l'ordre du jour, par suite d'un article du nouveau programme de l'École Centrale.

Ce programme porte, en effet, en Géométrie élémentaire, la question suivante :

Le lieu géométrique des points d'un plan, tels que le rapport des distances de chacun d'eux à un point fixe et à une droite fixe, soit constant, et égal à un nombre donné, est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le nombre donné est inférieur, égal, ou supérieur à l'unité.

Comme on le verra par ce qui suit, j'ai cherché à étudier les propriétés des courbes planes telles que le rapport des distances d'un quelconque de leurs points à un point fixe et à une droite fixe soit constant. Je montre que les courbes sont, suivant les cas, une ellipse, une hyperbole ou une parabole, et j'en déduis, en particulier, les propriétés focales, qui servent, en France, de définition classique pour ces trois, courbes.

Dans la présente étude j'ai laissé de côté la plus grande partie des propositions exposées dans les classes, en partant des propriétés focales, et je n'ai proposé de nouvelles démonstrations de ces propriétés que si elles me paraissaient sensiblement plus simples que celles qui sont généralement connues.

Ce n'est pas la première fois que les lecteurs du *Journal de Mathématiques élémentaires* rencontrent cette définition des sections coniques par la constance d'un rapport de distances. Dans une étude fort intéressante, publiée dans le Journal, en 1880, M. *Launoy* est parti de cette définition pour étudier les trois courbes, en employant principalement le calcul algébrique et la Trigonométrie. L'étude qui va suivre diffère donc complètement de celle de M. Launoy, puisqu'elle n'emploie que la Géométrie, sans faire jamais intervenir la Trigonométrie.

Il existe en Angleterre un certain nombre d'ouvrages, où l'on étudie les sections coniques en partant de la définition par le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe. Comme je l'ai déjà dit, c'est la lecture de quelques-uns de ces ouvrages qui m'a guidé dans l'étude que, je présente aujourd'hui. Je citerai, en particulier :

Conic sections treated geometrically, par W. H. Besant;

A geometrical treatise on conic sections, par le Rév. H. Drew; et enfin et surtout :

Ancient and modern geometry of conics, par Ch. Taylor. Ce dernier ouvrage peut être considéré comme un traité complet de la Géométrie des coniques; il est particulièrement précieux par les renseignements historiques qu'il contient sur les divers théorèmes se rapportant à ces courbes.

Si j'ajoute que les ouvrages anglais renferment un nombre considérable de problèmes proposés (le petit ouvrage de Besant

en contient plus de six cents; il y en a mille dans le Traité de Taylor), et que, dans les examens, on pose fréquemment des questions sur la Géométrie pure des sections coniques, on verra combien cette partie de la Géométrie est appréciée chez nos voisins.

Je voudrais voir le goût de cette étude se développer aussi parmi nos élèves; c'est ce qui m'a encouragé à publier cette Note, dans laquelle je n'ai pas, tant s'en faut, abordé toute la Géométrie des coniques. J'ai systématiquement laissé de côté tout ce qui touche à la Géométrie supérieure; mais j'ai cru utile de présenter aux élèves de Mathématiques élémentaires, sans dépasser les connaissances que supposent leurs programmes, une démonstration géométrique d'un certain nombre de propositions qu'ils reverront plus tard sous une autre forme; et j'ai voulu surtout, comme on le fait dans les cours supérieurs, rapprocher ces trois courbes qui, pour l'exposition de leurs propriétés principales, doivent marcher parallèlement.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES NOMBRES

Les mots *égaler*, *ajouter*, ne peuvent pas être définis d'une manière générale, parce qu'ils ont un trop grand nombre de significations; mais s'il est impossible de les définir d'une manière générale, il devient possible, et même il devient indispensable de les définir quand on les applique à des objets déterminés. Quelle que soit la définition que l'on donne de l'addition de plusieurs choses, nous supposerons cette définition telle que le résultat de l'addition soit indépendant de l'ordre dans lequel on ajoute ces choses.

On appelle quantités ou grandeurs mesurables, toutes les choses à propos desquelles on peut concevoir ou définir l'*égalité* et l'*addition*.

On dit qu'une quantité A est plus grande qu'une autre B

(ou que B est plus petit que A), si l'on peut obtenir A en ajoutant à B une certaine quantité C.

On dit que des quantités sont de *même espèce*, si l'on peut les concevoir égales, plus grandes ou plus petites les unes que les autres, et si l'on peut les ajouter entre elles.

Ceci posé, parmi toutes les quantités d'une même espèce, choisissons-en une bien déterminée, appelons-la *unité;* appelons également *unités* toutes les quantités qui lui sont égales; il sera démontré que l'on peut définir une même quantité et toutes celles qui lui sont égales de manière à les distinguer de toutes celles qui sont plus grandes ou plus petites, et cela en indiquant comment on peut les former avec l'unité. Alors :

Le *nombre* qui *mesure* une quantité est ce qui sert à définir cette quantité et *toutes celles qui lui sont égales* et à les distinguer de toutes celles qui sont plus grandes ou plus petites. *Mesurer* une quantité c'est chercher le nombre qui la *mesure.* Montrons maintenant comment on peut former les nombres.

Nombres entiers. — Considérons des quantités de même espèce, choisissons parmi ces quantités une unité, nous dirons que l'unité et les quantités qui lui sont égales et qui sont aussi des unités, sont mesurées par le nombre *un;* toutes les quantités égales au résultat de l'addition d'une unité avec une unité sont dites mesurées par le nombre *deux*; toutes les quantités égales au résultat de l'addition d'une unité avec une quantité mesurée par le nombre deux sont dites mesurées par le nombre *trois*... On appelle nombres *entiers* ceux qui servent à mesurer les quantités résultant de l'addition de plusieurs unités. On peut concevoir que l'on ait donné un nom particulier à chacun de ces nombres, et qu'on l'ait représenté au moyen d'un signe particulier, c'est ce que la numération nous apprend à faire.

On dit que deux nombres sont égaux, plus grand, ou plus petit l'un que l'autre suivant que les quantités qu'ils mesurent sont égales, plus grande ou plus petite l'une que l'autre — ajouter des nombres, c'est trouver le nombre qui mesure la quantité qui résulte de l'addition des quantités mesurées par ces nombres. — La soustraction est l'opération inverse de

l'addition. — Nous supposerons que l'on ait défini la multiplication des nombres entiers comme l'addition de nombres égaux au multiplicande, et la division comme une suite de soustractions successives de nombres égaux à un nombre donné.

Nombre fractionnaire. — Quelquefois l'unité est indivisible, c'est ce qui arrive, par exemple quand cette unité est un être animé, mais le plus souvent elle est divisible, et il existe des quantités autres que celles qui résultent d'addition d'unités. Supposons qu'il s'agisse de mesurer une quantité A qui ne puisse s'obtenir en ajoutant des unités, on partagera l'unité en deux parties égales, que l'on appellera des demis, en trois parties égales que l'on appellera des tiers, etc. S'il arrive que A et les quantités égales à A puissent s'obtenir par l'addition de demis, de tiers, etc.; s'il arrive par exemple que A résulte de l'addition de sept tiers, on dira que A est mesuré par le nombre fractionnaire sept-tiers. Ainsi les nombres fractionnaires sont ceux qui mesurent les quantités résultant de l'addition de parties égales de l'unité. Les nombres entiers et fractionnaires sont ceux que l'on appelle *commensurables*. Deux quantités sont *commensurables* quand il existe une unité qui peut servir à les exprimer toutes deux en nombres entiers. — Nous supposerons que les quatre opérations sur les fractions aient été définies, et que l'on ait défini le produit de deux tiers par trois quarts, comme étant les trois quarts de deux tiers.

Nombres incommensurables. — Nous appellerons limite d'une quantité variable une quantité fixe dont celle-ci s'approche de manière à en différer d'aussi peu que l'on veut. Une quantité sans cesse croissante (ou décroissante) qui ne peut dépasser (ou devenir inférieure) à une quantité fixe a une limite qui est la plus petite (ou la plus grande) des quantités qu'elle ne peut dépasser (ou à laquelle elle ne peut devenir inférieure).

Ceci posé, supposons qu'ayant successivement partagé l'unité en 2, 3, ... , n,... parties égales, la quantité A ne puisse jamais résulter de l'addition de parties égales de l'unité, on dira que

A est *incommensurable avec l'unité*, et est mesurée par un nombre incommensurable. Il s'agit, maintenant, de définir ce nombre c'est-à-dire de définir toutes les quantités égales à A de manière à les distinguer de celles qui sont plus grandes ou plus petites. Pour cela il suffit de dire quels sont les nombres commensurables mesurant les quantités plus grandes que A et les nombres commensurables mesurant les quantités plus petites que A. En effet, si l'on connaît tous les nombres commensurables mesurant les quantités plus grandes ou plus petites que A, on saura par exemple que A est compris entre les m et les $m+1$, $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité quel que grand que soit n; et si une autre quantité B pouvait jouir des mêmes propriétés, A et B différeraient entre elles de moins de la n^e partie de l'unité, c'est-à-dire d'aussi peu que l'on voudrait; B serait donc une des quantités égales à A. Ainsi, un nombre incommensurable sera défini en fournissant le moyen de se procurer les nombres commensurables plus grands ou plus petits, c'est-à-dire mesurant les quantités commensurables plus grandes ou plus petites que celles qu'il mesure lui-même.

On peut maintenant dire que l'on appelle limite d'un nombre variable, un nombre fixe dont le nombre variable peut s'approcher de manière à en différer d'aussi peu que l'on veut; alors tout nombre croissant, qui ne peut pas devenir plus grand qu'un nombre donné, aura une limite; tout nombre décroissant qui ne peut pas devenir plus petit qu'un nombre donné, a une limite.

Il résulte, de ces définitions et de ces remarques, qu'un nombre incommensurable est la limite commune des nombres commensurables croissants plus petits que lui et des nombres commensurables décroissants plus grands que lui. Mais cette propriété des nombres incommensurables qui peut servir à les définir appartient aussi aux nombres commensurables et peut également servir à les définir.

Ajouter des nombres quelconques, commensurables ou incommensurables, c'est trouver le nombre qui mesure la somme des quantités mesurées par ces nombres. — La soustraction est l'opération inverse de l'addition. — Pour définir le produit de deux nombres A et B, que ces nombres soient ou ne soient pas commensurables, nous désignerons par a,

a', a'',... des nombres commensurables croissants ayant pour limite A; par α, α', α'',... des nombres commensurables décroissants ayant pour limite A; par b, b', b'',.. des nombres commensurables croissants ayant pour limites B; par β, β', β'',... des nombres commensurables décroissants ayant pour limite B. Si nous considérons alors les produits ab, $a'b'$, $a''b''$,.. ce seront des nombres croissants moindres que $\alpha\beta$ par exemple, ils auront donc une limite l. Les nombres $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$... sont décroissants et plus grands que ab, ils ont donc une limite λ. Je dis que $l = \lambda$, en effet : en posant

$$a^{(n)} = a^{(n)} + \omega^{(n)} \qquad \beta^{(n)} = b^{(n)} + \pi^{(n)},$$

on a $$\alpha^{(n)}\beta^{(n)} - a^{(n)}b^{(n)} = (a^{(n)} + \omega^{(n)})(b^{(n)} + \pi^{(n)}) - a^{(n)}b_n$$
$$= a^{(n)}\pi^{(n)} + b^{(n)}\omega^{(n)} + \omega^{(n)}\pi^{(n)};$$

or $a^{(n)}\pi^{(n)}$, $b^{(n)}\omega^{(n)}$, $\omega^{(n)}\pi^{(n)}$ sont des nombres que l'on peut rendre aussi petit que l'on veut. Donc leur somme $\alpha^{(n)}\beta^{(n)} - a^{(n)}b^{(n)}$ peut être rendue aussi petite que l'on veut, ce qui revient à dire que $\alpha^{(n)}\beta^{(n)}$ et $a^{(n)}b^{(n)}$ diffèrent l'un de l'autre d'aussi peu que l'on veut; or $a^{(n)}b^{(n)}$ diffère de sa limite l d'aussi peu que l'on veut, $\alpha^{(n)}\beta^{(n)}$ diffère de λ d'aussi peu que l'on veut; donc l et λ, différant d'aussi peu que l'on veut, sont égaux ; et alors $l = \lambda$ est ce que l'on appelle le produit de A par B.

La division est l'opération inverse de la multiplication, elle se trouve définie par conséquent d'après ce qui précède. Nous nous bornerons, pour terminer, à énoncer les théorèmes suivants dont la démonstration est facile.

La somme (ou le produit) de plusieurs nombres est indépendante de leur ordre. H. L.

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu, de M. A. Poulain, la lettre suivante :

Monsieur,

Dans le *J. E.* 1889, p. 18, vous avez fixé une règle *algébrique* pour spécifier ce qu'on doit désormais entendre par premier et second brocardien d'un point, et, plus généralement, par

première et seconde permutation directe des coordonnées. Il y a une convention analogue à faire pour les isobariques et les brocardiennes des droites, des coniques, etc. Mais ici on peut avoir quelque hésitation. Sont-ce les coordonnées, ou les coefficients, qu'on doit faire avancer d'un rang, pour avoir la première isobarique? Il me semble que ce sont les coordonnées, par analogie avec les points; de plus, c'est ce qu'il y a de plus clair à concevoir quand l'équation renferme des produits de coordonnées. De la sorte, pour la droite

(1) $$A\alpha + B\beta + C\gamma = o,$$

la première isobarique est

(2) $$A\beta + B\gamma + C\alpha = o.$$

Réponse. — La question sur laquelle M. Poulain veut bien me consulter doit être résolue, comme il le dit. Dans mon idée, les coordonnées doivent former la base du langage de la Géométrie. Par exemple, si l'on considère les équations

(1) $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$, (2) $f(\beta, \gamma, \alpha) = o$, (3) $f(\gamma, \alpha, \beta) = o$,

(2) est la *première associée* de (1); (3) représente la *seconde associée*.

Les coefficients A, B, C, ne peuvent exercer aucune influence sur la dénomination des lignes qui correspondent aux équations dans lesquelles ils pénètrent. La raison principale en est qu'une équation peut renfermer de nombreux coefficients. Au contraire, elle ne contient jamais que les trois lettres α, β, γ, et celles-ci me paraissent constituer la source naturelle du langage géométrique, comme je viens de le dire. *(G. L.)*

QUESTION 350

Solution.

Un système de deux droites parallèles AB, CD, *est coupé par deux sécantes* AC, BD. *On joint* B *et* D *à un point quelconque* E *de* AC. *1° Si, par* A *et* C, *on mène des parallèles respectivement à* ED, EB, *ces parallèles se coupent en* F *sur* BD; *2° si par* A *et* C, *on mène des parallèles à* EB, ED, *quel est le lieu du point* G *où elles se rencontrent?* (Bernès.)

La première partie a été autrefois proposée par M. d'Ocagne dans les *Nouvelles Annales* (1883, p. 384). Une solution a été insérée dans ce recueil (même tome, p. 478).

La seconde partie est une conséquence immédiate de la première. On observera en effet que la droite FG passe par le milieu M de AC. Le lieu de G est donc la droite symétrique de AC, par rapport à M.

QUESTIONS PROPOSÉES

351. — Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que, entre trois droites concourantes AX, AY, AZ, on puisse inscrire un triangle dont les côtés soient parallèles à trois directions données, U, V, W (le côté parallèle à U entre AY et AZ, le côté parallèle à V entre AZ et AX, et le côté parallèle à W entre AX et AY), c'est que si BC est une parallèle à AX, tracée entre AZ et AY, les parallèles à U,V, W par A,B,C sont concourantes. *(Bernès.)*

352. — Soit Δ la circonférence circonscrite au triangle ABC. Par un point M, pris sur Δ, on fait passer deux circonférences, respectivement tangentes aux côtés AB, AC, aux points B,C. Elles se coupent en un point A′, situé sur BC. Démontrer cette proposition; et reconnaître que AA′, et les droites analogues BB′, CC′ sont concourantes.

N.-B. — On pourra ratacher ce théorème à certaines propriétés connues de la parabole.

(G. L.)

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 30284-12-9.

SUR LA FORMULE DE WARING

(ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ)

par M. **Lalbalétrier.**

(*Suite*, voir p. 5.)

APPLICATIONS

9. — *Résoudre le système*

$$(9)\qquad \begin{cases} x + y = a, \\ x^m + y^m = b^m. \end{cases}$$

Si nous posons $xy = z$, les inconnues x et y seront les racines de l'équation

$$(10)\qquad X^2 - aX + z = 0.$$

Il suffit donc de trouver la valeur de z; or, d'après la formule (5),

$$b^m = a^m - \frac{m}{1} a^{m-2}z + \frac{m(m-3)}{1 . 2} a^{m-4}z^2 + \dots$$

Cette équation, qui permet de déterminer z, est du degré $\frac{m}{2}$ lorsque m est pair; du degré $\frac{m-1}{2}$ lorsque m est impair. Il en résulte que le système (9) se ramène au second degré pour toutes les valeurs de m inférieures à 6.

En particulier, si $m = 5$, l'équation en z sera:

$$(11)\qquad 5az^2 - 5a^3z + a^5 - b^5 = 0,$$

d'où
$$z = \frac{5a^3 \pm \sqrt{5a^6 + 20ab^5}}{10a}.$$

En supposant a et b positifs, les valeurs de z seront toujours réelles; pour que celles de x et de y le soient aussi, il faut, d'après l'équation (10), que $\frac{a^2}{4}$ soit supérieur aux deux racines z' et z''. Faisons donc $z = \frac{a^2}{4}$ dans l'équation (11) et cherchons

le signe du résultat de la substitution : ce signe dépendra de celui du binôme

$$a^5 - 16b^5$$

et trois cas pourront se présenter :

1° $a^5 > 16b^5$.

La quantité $\frac{a^2}{4}$ est alors extérieure aux deux racines z' et z''. Comme la demi-somme $\frac{z' + z''}{2} = \frac{a^2}{2}$, on voit que $\frac{a^2}{4}$ est toujours inférieur à z' et z'', donc x et y sont toujours imaginaires.

2° $a^5 = 16b^5$.

$\frac{a^2}{4}$ est alors une des racines de l'équation (11). Cette valeur, portée dans l'équation (10), donne

$$x = y = \frac{a}{2},$$

c'est la seule solution du système (9).

3° $a^5 < 16b^5$.

Dans ce cas, la quantité $\frac{a^2}{4}$ est comprise entre les deux racines z' et z''. Nous obtiendrons donc pour x et y un seul système de valeurs réelles.

En résumé, le système (9), en supposant $m = 5$, ne peut jamais avoir qu'une solution réelle lorsque la condition

$$a^5 \leqslant 16b^5$$

est remplie.

9. — *Résoudre le système*

$$(12)\quad \begin{cases} x + y = p, \\ a_0x^m + a_1x^{m-1}y + a_2x^{m-2}y^2 + \ldots + a_2x^2y^{m-2} + a_1xy^{m-1} + a_0y^m + b = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations sont symétriques en x et y, et la seconde peut s'écrire ainsi :

$$(13)\quad a_0(x^m + y^m) + a_1(x^{m-2} + y^{m-2})xy + a_2(x^{m-4} + y^{m-4})x^2y^2 + \ldots + b = 0.$$

Si l'on suppose $xy = z$, les valeurs de x et de y seront encore les racines de l'équation du second degré

$$X^2 - pX + z = 0;$$

et on pourra mettre l'équation (13) sous la forme

(14)
$$a_0 S_m + a_1 z S_{m-2} + a_2 z^2 S_{m-4} + \ldots + a_\lambda z^\lambda S_{m-2\lambda} + \ldots + b = 0.$$

Les fonctions S_m, S_{m-2}, ... $S_{m-2\lambda}$ ... s'expriment au moyen de p et de z, donc l'équation (14) ne renferme que la seule inconnue z; elle est, au plus, du degré $\frac{m}{2}$. Le système (12) peut donc encore se ramener au second degré toutes les fois que m ne dépasse pas 5.

Pour $m = 5$, l'équation (14) devient
$$a_0 S_5 + a_1 z S_3 + a_2 z^2 S_1 + b = 0,$$
ou
$$a_0(p^5 - 5p^3 z + 5pz^2) + a_1 z(p^3 - 3pz) + a_2 z^2 p + b = 0,$$
et en ordonnant par rapport à z:
$$(5a_0 - 3a_1 + a_2)pz^2 - (5a_0 - a_1)p^3 z + a_0 p^5 + b = 0.$$

On tirera de cette équation deux valeurs de z, réelles ou imaginaires, et la discussion s'achèvera comme dans l'exemple précédent; $\frac{p^2}{4}$ étant compris entre les racines z et z', ou extérieur à ces racines, selon le signe de la quantité.
$$(a_0 + a_1 + a_2)p^5 + 16b.$$

Du reste, le système (9) n'est qu'un cas particulier du système (12), dans lequel on fait:
$$a_1 = a_2 = 0 \quad \text{et} \quad a_0 = 1$$
(nous supposons ici $m = 5$).

10. — *Résoudre le système*

15
$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) + bxy + c(x + y) + d = 0, \\ a'(x^2 + y^2) + b'xy + c'(x + y) + d = 0. \end{cases}$$

Ces équations étant symétriques par rapport à x et y, on posera
$$x + y = p,$$
$$xy = q,$$
et l'on aura
$$x^2 + y^2 = p^2 - 2q.$$

Par suite, le système (15) devient :
$$\begin{cases} ap^2 + (b - 2a)q + cp + d = 0 \\ ap^2 + (b' - 2a')q + c'p + d' = 0. \end{cases}$$
d'où on tire

(16)
$$\frac{b - 2a}{b' - 2a'} = \frac{ap^2 + cp + d}{a'p^2 + c'p + d'},$$

ce qui nous conduit à une équation du second degré en p. Mais, au lieu de discuter cette équation du second degré, il sera préférable d'étudier les variations de la fraction

$$\frac{ap^2 + cp + d}{a'p^2 + c'p + d'},$$

ce qui permettra de reconnaître les conditions de réalité des valeurs de p. Ces valeurs trouvées, on aura :

$$q = \frac{ap^2 + cp + d}{2a - b}$$

et les valeurs de x et de y seront les racines de l'équation

$$X^2 - pX + q = 0.$$

11. — Les applications que nous venons de passer en revue, et qu'il serait facile de multiplier, suffisent pour montrer l'importance des fonctions symétriques qui non seulement donnent une méthode élégante et facile pour résoudre un grand nombre de systèmes d'équations à deux inconnues, mais encore permettent de reconnaître, *a priori*, si ces systèmes peuvent dépendre de la résolution d'une équation du second degré.

Les fonctions symétriques sont d'ailleurs susceptibles d'un grand nombre d'autres applications, et nous indiquerons encore leur usage dans la résolution des équations réciproques.

12. — Prenons une équation dans laquelle les coefficients des termes à égale distance des extrêmes soient égaux et de mêmes signes; elle s'écrit :

$$a_0(x^{2n} + 1) + a_1(x^{2n-1} + x) + a_2(x^{2n-2} + x^2) + \dots + a_n x^n = 0.$$

En divisant tous les termes par x^n, elle devient :

$$(17)\quad a\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + a_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + a_2\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \dots + a_n = 0.$$

Si nous posons $\qquad x + \frac{1}{x} = z,$

comme on a $\qquad x \times \frac{1}{x} = 1,$

nous pourrons regarder x et $\frac{1}{x}$ comme les racines de l'équation

du second degré

$$X^2 - zX + 1 = 0,$$

et, d'après la formule (5), nous aurons

$$(18) \quad x^n + \frac{1}{x^n} = z^n - \frac{n}{1} z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} z^{n-4} + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} z^{n-6} + \dots$$

Ainsi toutes les parenthèses de l'équation (17) s'exprimeront rationnellement en z et la résolution de l'équation réciproque de degré $2n$ dépendra de la résolution d'une équation en z de degré n, formée comme nous le venons de le voir.

ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Auguste Morel.**

(*Suite*, voir p. 00.)

I. — Définitions et propriétés générales.

1. — Étant donnés un point fixe F, et une droite fixe DD_1, supposons qu'un point M se meuve dans le plan déterminé par la droite DD_1 et par le point F, de façon que, si d'une position quelconque du point M, j'abaisse une perpendiculaire Mm rur la droite DD_1, le rapport $\frac{MF}{Mm}$ soit égal à un nombre donné k. Le point M, dans ces conditions, décrit une certaine ligne appelée SECTION CONIQUE, ou plus simplement une CONIQUE. Ce nom résulte d'une propriété démontrée plus loin.

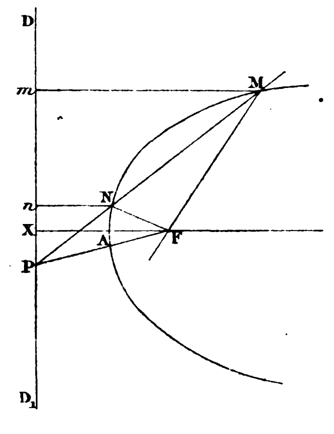


Fig. 1.

Le rapport k peut être inférieur, égal ou supérieur à l'unité. Il en résulte, pour le lieu géométrique du point M, trois formes très distinctes du lieu, formes qui prennent chacune un nom différent.

Lorsque le rapport k est inférieur à l'unité, la ligne s'appelle *ellipse*. C'est une *parabole*, quand le rapport est égal à l'unité; enfin, c'et une *hyperbole*, si le rapport k est supérieur à l'unité.

2. — Le point F a reçu le nom de *foyer*; la ligne DD_1 est la *directrice* correspondante. Si, du foyer on abaisse une perpendiculaire sur la directrice, cette ligne est l'*axe* de la courbe. Il est facile de voir, d'après la définition même, que la courbe est symétrique par rapport à cet axe.

La droite qui joint le foyer F à une position quelconque du point mobile M s'appelle le *rayon vecteur* du point M.

Le rapport k se nomme l'*excentricité*.

3. — Si $k = 1$, il y a évidemment un point de la courbe, et un seul, sur l'axe: c'est le milieu A de la distance du foyer F au point X, où l'axe rencontre la directrice. Le point A est un *sommet* de la courbe.

Si le rapport k est différent de l'unité, il est possible de trouver, sur l'axe, deux points du lieu. En effet, on sait que, sur une droite, il y a toujours deux points, tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes F et X pris sur cette droite, soit égal à un rapport donné, différent de l'unité. Je donnerai encore à ces deux points le nom de *sommets*, et j'appellerai plus particulièrement *axe* de la courbe la portion de la droite FX comprise entre ces deux points A, A'. Le milieu de ce segment AA', que je désignerai par O, s'appellera le *centre* de la courbe; et je dirai alors qu'une conique dans laquelle l'excentricité est différente de l'unité, est une *conique à centre*.

4. — Nous rappelons que, dans une courbe quelconque, possédant un axe, on nomme *ordonnée* la perpendiculaire abaissée d'un point sur l'axe; l'*abscisse* est la distance, comptée sur l'axe, entre le sommet et le pied de l'ordonnée.

La *tangente* est la limite des positions que prend une sécante tournant autour d'un de ses points d'intersection avec la courbe, jusqu'à ce qu'un point voisin d'intersection vienne se confondre avec le précédent. Ce point s'appelle *point de contact*. La perpendiculaire à la tangente, menée par le point de contact, est la *normale*.

Si l'on prolonge la normale et la tangente jusqu'à leur rencontre avec l'axe, et que l'on mène aussi l'ordonnée du point de contact, la partie de l'axe comprise entre l'ordonnée et la normale s'appelle la *sous-normale;* la partie de l'axe comprise entre l'ordonnée et la tangente est la *sous-tangente.*

5. Théorème. — *Si une droite* MNP *rencontre la conique aux points* M, N, *et la directrice au point* P, *la droite* FP *est également inclinée sur les rayons vecteurs* FM *et* FN.

Pour démontrer ce théorème, j'abaisse, du point M, la perpendiculaire Mm, et du point N la perpendiculaire Nn sur la directrice.

Les triangles semblables PNn, PMm, donnent

$$\frac{\text{PN}}{\text{PM}} = \frac{\text{N}n}{\text{M}m}.$$

D'autre part, les points M et N étant sur la conique ayant pour foyer le point F et pour directrice la droite DD_1, nous avons

$$\frac{\text{FN}}{\text{N}n} = \frac{\text{FM}}{\text{M}m} = k.$$

On en déduit

$$\frac{\text{N}n}{\text{M}m} = \frac{\text{FN}}{\text{FM}}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\text{PN}}{\text{PM}} = \frac{\text{FN}}{\text{FM}}.$$

Par suite, P est sur la bissectrice de l'un des angles formés par les deux rayons vecteurs FM et FN.

6. Théorème. — *Une droite ne peut rencontrer une conique en plus de deux points.*

Soit, en effet, une droite qui rencontre la directrice au point P, et soit N un des points où elle rencontre la conique; je mène la ligne FP, et la ligne FN. Puis, par le point F, je mène une droite faisant, avec FP, un angle égal et adjacent à l'angle NFP. Il n'y a qu'une droite remplissant cette condition. elle rencontre la droite PN en un point M qui appartient à la courbe; car on a, d'après la construction :

$$\frac{\text{PN}}{\text{PM}} = \frac{\text{FN}}{\text{FM}}; \qquad \text{et} \qquad \frac{\text{PN}}{\text{PM}} = \frac{\text{N}n}{\text{M}m}.$$

De ces deux proportions, on déduit

$$\frac{FM}{Mm} = \frac{FN}{Nn} = k,$$

et le point M est sur la courbe.

Inversement, tout point situé à la fois sur la droite et sur la courbe doit être tel que la droite qui le joint au point F et la droite FN soient également inclinées sur FP. Donc cette ligne n'est autre que FM, et, par suite, le point N est confondu avec M. Il en résulte que la ligne PNM ne peut rencontrer la courbe qu'aux deux points M et N.

(A suivre.)

SUR UN OUVRAGE DE CRELLE

Par M. **Vigarié.**

L'article « Crelle ou Brocard », que M. Morel a récemment publié dans ce journal, appelle de nouveau l'attention sur un petit ouvrage de Crelle, naguère inconnu. Ce Mémoire paraît avoir été signalé pour la première fois par M. O. Krimmel, dans une notice nécrologique sur Nagel, parue dans la *Correspondenz-Blatt* de 1884, puis dans les programmes scolaires de Grimma (1886) et de Mülheim (1889), par MM. Uhlich et Emmerich.

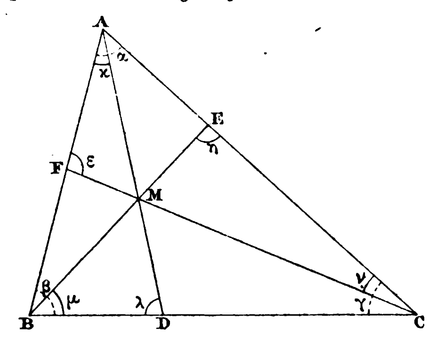
Il ne reste plus que de rares exemplaires de cet ouvrage que M. Schlömilch nous reproche si amèrement d'ignorer; et, même en Allemagne, il est à peu près impossible de se le procurer. Nous avons pensé qu'il était intéressant de faire connaître exactement ce qu'il contient (*): on verra, par les courts extraits que nous allons donner, que l'opuscule de Crelle a une importance bien moindre que celle que semble lui attacher M. Schlömilch.

L'ouvrage de Crelle est un petit livre in-8° imprimé en lettres gothiques, de 64 pages, suivies de deux planches con-

(*) Nous remercions, à ce propos, M. Emmerich qui a bien voulu mettre gracieusement à notre disposition, pendant quelques jours, l'exemplaire qu'il possède.

tenant ensemble 14 figures; il est divisé en 37 paragraphes. En voici le titre exact :

Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks rücksichtlich dreier durch die Winkel-Spitzen gezogenen geraden Linien; von Dr. Aug. Leop Crelle, königl. prussischem Ober Baurathe, mit 2 Kupfer-tafeln. Berlin 1816. In der Maureschen Buchhandlung, Poststrasse, Nr. 29.



Crelle considère un triangle ABC et trois droites AD, BE, CF concourant en M; il pose $BD = k$, $CE = m$, $AF = n$; et il définit les angles comme l'indique la figure ci-contre.

Les trois droites AD, BE, CF étant concourantes, on a :

$$\frac{kmn}{(a-k)(b-m)(c-n)} = 1, \quad \text{ou} \quad kmn = (a-k)(b-m)(c-n).$$

En évaluant les quantités qui entrent dans cette dernière formule, au moyen des angles donnés, on trouve

$$\sin(\alpha - x)\sin(\beta - \mu)\sin(\gamma - \nu) = \sin x \sin \mu \sin \nu.$$

On en conclut

$$(1) \quad \frac{kmn}{\sin x \sin \mu \sin \nu} = \frac{(a-k)(b-m)(c-n)}{\sin(\alpha - x)\sin(\beta - \mu)\sin(\gamma - \nu)},$$

ou

$$\sin(\lambda + \beta)\sin(\eta + \gamma)\sin(\varepsilon + \alpha)$$
$$= \sin(\lambda - \gamma)\sin(\eta - \alpha)\sin(\varepsilon - \beta).$$

Dans le cas où $x = \mu = \nu$, la formule (1) devient :

$$\sin(\alpha - x)\sin(\beta - x)\sin(\gamma - x) = \sin^3 x.$$

C'est en partant de cette égalité que Crelle arrive par des calculs fort longs, aux formules :

$$\cot x = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma,$$
$$\operatorname{cos\acute{e}c}^2 x = \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \alpha + \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \beta + \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \gamma.$$

Cette manière de déterminer la valeur de l'angle de Brocard est infiniment moins élégante que celles qui ont été données

ultérieurement; particulièrement par M. Brocard et dans ce Journal par M. Morel (1883) (*).

Crelle remarque, en outre, que la droite AD divise le côté BC dans le rapport des carrés de deux des côtés du triangle (**).

Cette relation se trouve d'ailleurs dans l'ouvrage de Crelle

$$\frac{a-k}{k}=\frac{a^2}{c^2}.$$

Pour construire l'angle de Brocard, Crelle se sert de la formule : $\operatorname{tg} x = \frac{a \sin\beta \sin(2\pi-\gamma)}{c\sin\gamma - a\sin\beta\cos(2\pi-\gamma)}$, ce qui le conduit à la construction suivante : Prenons, sur CA, CN = AB ; puis abaissons de C et de N les perpendiculaires CK et NO sur AB et BC. Portons sur CB et sur AC à partir du point C, les longueurs CL et CP respectivement égales à CK et à NO. L'angle en P, du triangle CPL, est l'angle cherché.

Enfin, Crelle vérifie que si au triangle ABC, on circonscrit un second triangle DFE tel que $\widehat{EAB}=\widehat{DBC}=\widehat{FCA}$, les deux triangles ABC, DEF ont même point de Brocard.

Telles sont, sans exception, les propriétés données par Crelle sur ce sujet. On peut les comparer avec les propositions, si nombreuses et si remarquables, découvertes par M. Brocard ; et l'on comprendra pourquoi, en bonne justice, le nom de ce Géomètre a été donné aux points et à l'angle en question.

Dans le reste de son ouvrage, Crelle touche, mais très légèrement, aux centres isogones, aux points inverses, aux points réciproques.

(*) On trouvera un résumé des solutions de Crelle, Jacobi, Hoffmann, Brocard, Morel... dans le programme scolaire de M. Emmerich : *Der brocardsche Winkel des Dreiecks.* Mars, 1889.

A la liste, déjà longue, des auteurs qui ont, autrefois, rencontré l'angle de Brocard, il convient d'ajouter le Mémoire suivant, qui nous a été signalé récemment par M. Emmerich:

Niegemann. — *Analytische Entwickelung der Sätze über die Transversalen und merkwürdigen Punkte des Dreiecks aus allgemeinen Prinzipien.* Köln, 1859. *Programm des kathol. Gymnasiums.*

(**) Cette formule, et les formules analogues, font connaître les coordonnées barycentriques des points de Brocard. Il suffit d'observer que l'on a

$$\frac{a-k}{k}=\frac{\text{AMC}}{\text{AMB}}.$$

Ces formules existent d'ailleurs, d'après ce que nous a dit M. Vigarié dans l'opuscule de Crelle. G. L.

En résumé, le livre de Crelle était un simple recueil de questions élémentaires, qui, aux yeux même de son auteur, avaient assez peu d'importance. La meilleure preuve de ce fait, c'est que Crelle n'a pas parlé de ces recherches dans la célèbre publication qu'il fonda quelques années plus tard. On peut supposer qu'il l'aurait fait, s'il eut attaché quelque prix à ses propositions.

Nous ajouterons encore un mot, pour préciser notre pensée sur le sujet qui a motivé la ferme et digne réponse que M. Morel a faite à l'article de M. Schlömilch. S'il s'agissait, pour mériter de donner son nom à certaines propositions mathématiques, d'avoir été le premier à y toucher, sans avoir soupçonné d'ailleurs leur importance, alors il faudrait remonter jusqu'à Euclide. En effet, comme nous l'a fait remarquer M. Tarry, du porisme CLXXVI (*), on peut déduire aisément quelques propriétés des points et de l'angle de Brocard.

Le porisme en question correspond à l'énoncé suivant :

Un angle de grandeur donnée se meut de manière qu'un de ses côtés passe par un point donné, et que son sommet glisse sur une circonférence de cercle ; le second côté rencontre la circonférence en un second point par lequel on mène une droite faisant avec ce côté un angle égal à l'angle mobile, mais dans un sens contraire : cette droite passe par un point donné.

(*) La remarque faite par M. Tarry est ingénieuse; elle mériterait d'être développée et M. Vigarié nous a donné, sur ce sujet, un article intéressant que nous publierons prochainement.

A ce propos, je signalerai une rectification au livre des porismes.

Chasles (*loc. cit.* p. 259) signale un porisme proposé par Simson et correspondant à l'énoncé suivant :

Si de deux points donnés A, B *on mène à chaque point* C *d'un cercle donné de position, deux droites qui rencontrent le cercle en deux autres points* D, E, *la droite* DE *fera un angle donné avec une droite menée par un point donné, ou sera parallèle à une droite donnée de position, ou bien passera par un point donné.*

Dans le langage moderne, C étant un point mobile sur le cercle donné, DE passerait par un point fixe, situé à distance finie, ou infinie ; ce qui est manifestement inexact.

L'erreur provient bien de Simson, comme le prouve la citation, faite par Chasles, du texte latin de l'énoncé en question. Chasles ayant rejeté cet proposition pour d'autres raisons, ne s'est pas aperçu de son inexactitude.

G. L.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1889

Mathématiques élémentaires.

Solution par M. Camille Birault, élève à l'École Centrale, ancien élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Launay). — 1er prix. — Vétérans.

Soient a *et* b (a $\geqslant$ b) *les rayons de deux cercles situés dans un même plan et soit* d *la distance des centres* A *et* B *de ces cercles.*

On fait mouvoir une portion de droite PQ *de longueur* l *de façon que l'extrémité* P *reste sur la circonférence du cercle de rayon* a *et que l'extrémité* Q *reste sur la circonférence du cercle de rayon* b. *Soient pour une position de la droite* PQ, α *l'angle* PAB *et* β *l'angle* QBX, BX *étant le prolongement de* AB *au delà de* B *dans le sens* AB.

Former l'équation qui lie les angles variables α *et* β *à* a, b, d, l *et déduire de cette équation les limites entre lesquelles peuvent varier chacun des angles* α *et* β.

Discuter le problème et trouver, réduites au plus petit nombre possible, les conditions que doivent remplir les données :

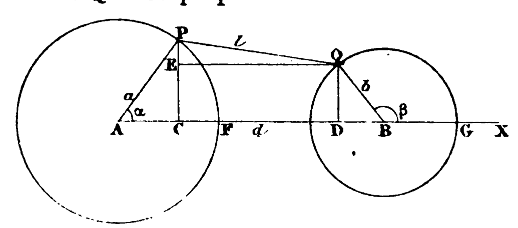
1° Pour que chacun des points P *et* Q *puisse parcourir toute la circonférence sur laquelle il se meut ;*

2° Pour que l'un de ces deux points, seul, puisse parcourir toute la circonférence sur laquelle il se meut ;

3° Pour que chacun des deux points ne puisse parcourir qu'une portion de circonférence ;

4° Pour qu'une droite, de longueur l, *ne puisse être placée de façon à avoir une extrémité sur chacune des circonférences données.*

Soient PC et QD les perpendiculaires abaissées de P et Q



sur AB. Par le point Q, je mène QE parallèle à AB jusqu'à sa

rencontre en E avec PC. Dans le triangle rectangle PQE on a

$$\overline{PQ}^2 = \overline{EQ}^2 + \overline{PE}^2.$$

Or $\overline{EQ}$ = proj^{on} de PQ sur AX, le contour APQB a pour résultante AB; donc, d'après le théorème des projections

$$d = \text{p}^{on}\,AP + \text{p}^{on}\,PQ + \text{p}^{on}\,QB,$$

ou $$d = a\cos\alpha + \overline{EQ} - b\cos\beta;$$

donc $$\overline{EQ} = d - a\cos\alpha + b\cos\beta.$$

On a

$PE = PC - QD \quad PC = a\sin\alpha \quad QD = b\sin(\pi-\beta) = b\sin\beta.$

donc $$PE = a\sin\alpha - b\sin\beta.$$

La relation entre α et β à a, b, d, l est donc

$$(1)\qquad l^2 = (d - a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha - b\sin\beta)^2.$$

Cette équation est générale, en y regardant α et β comme des arcs pouvant varier de o à 2π, ayant comme origine le premier le point F, le second le point G, le sens positif étant le sens inverse de la marche des aiguilles d'une montre.

En écrivant tout dans le second membre et effectuant les calculs, la relation (1) devient

$$(2)\qquad d^2 + a^2 + b^2 - l^2 - 2ad\cos\alpha + 2bd\cos\beta$$
$$- 2ab\cos\alpha\cos\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta = 0.$$

Posant $d^2 + a^2 + b^2 - l^2 = 2k^2$, et ordonnant par rapport à $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, on a

$$a(b\cos\beta + d)\cos\alpha + ab\sin\beta\sin\alpha = bd\cos\beta + k^2.$$

Je remplace $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ par leurs expressions en fonction de $\operatorname{tg}\alpha$:

$$a(b\cos\beta + d)\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} + ab\sin\beta\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$
$$= bd\cos\beta + k^2,$$

les signes des radicaux se correspondent.

$$a(b\cos\beta + d) + ab\sin\beta\operatorname{tg}\alpha$$
$$= \pm(bd\cos\beta + k^2)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

D'où en élevant au carré les deux membres et ordonnant par rapport à $\operatorname{tg}\alpha$,

$$[a^2b^2\sin^2\beta - (bd\cos\beta + k^2)^2]\operatorname{tg}^2\alpha + 2a^2b\sin\beta(b\cos\beta + d)\operatorname{tg}\alpha$$
$$- (bd\cos\beta + k^2)^2 + a^2(b\cos\beta + d)^2 = 0.$$

Pour que $\operatorname{tg}\alpha$ soit réel on a la condition

$$a^4b^2\sin^2\beta(b\cos\beta+d)^2-[a^2b^2\sin^2\beta-(bd\cos\beta+k^2)^2][a^2(b\cos\beta+d)^2 - (bd\cos\beta+k^2)^2] \geqslant 0,$$

$$a^2b^2+a^2d^2+2a^2bd\cos\beta-b^2d^2\cos^2\beta-2k^2bd\cos\beta-k^4\geqslant 0$$

ou $\quad b^2d^2\cos^2\beta+2bd(k^2-a^2)\cos\beta+k^4-a^2b^2-a^2d^2\leqslant 0.$

On a dans le premier membre un trinôme en cos β. Le discréminant de ce trinôme est

$$b^2d^2(k^2-a^2)^2-b^2d^2(k^4-a^2b^2-a^2d^2),$$

ou $$b^2d^2[-2a^2k^2+a^4+a^2b^2+a^2d^2),$$

ou $a^2b^2d^2l^2$, quantité essentiellement positive. Le trinôme en cos β, égale à zéro, a donc ses racines réelles; le coefficient de $\cos^2\beta$ étant positif, ce trinôme sera négatif pour toutes les valeurs de cos β comprises entre les racines.

Ces racines sont

$$\frac{-bd(k^2-a^2)\pm abdl}{b^2d^2}=\frac{-(d^2+b^2-a^2-l^2)\pm 2al}{2bd}$$

La racine supérieure est

$$\frac{a^2+l^2-b^2-d^2+2al}{2bd} \text{ ou } \frac{(a+l)^2-(b^2+d^2)}{2bd},$$

la racine inférieure

$$\frac{a^2+l^2-b^2-d^2-2al}{2bd} \text{ ou } \frac{(a-l)^2-(b^2+d^2)}{2bd}$$

Pour que tg α soit réel on a donc les conditions

$$\frac{(a-l)^2-(b^2+d^2)}{2bd}\leqslant\cos\beta\leqslant\frac{(a+l)^2-(b^2+d^2)}{2bd},$$

ce qui donne les limites entre lesquelles pourra varier cos β et, par suite, l'angle β.

Au lieu d'ordonner la relation (2) par rapport à cos α et sin α, on aurait pu ordonner par rapport à cos β et sin β; on aurait eu une expression du deuxième degré en tg β. Alors, en cherchant la condition de réalité de tg β, on aurait eu les limites entre lesquelles peut varier cos α. On peut observer que la relation (2) ne change pas en y remplaçant β par α, α par β, b par $-a$, a par $-b$. Toutes les égalités ou inégalités tirées de cette relation (2) restent donc exactes en y faisant ces substitutions. En particulier, les dernières inégalités deviennent

$$\frac{(d^2+a^2)-(b+l)^2}{2ad}\leqslant\cos\alpha\leqslant\frac{(d^2+a^2)-(b-l)^2}{2ad},$$

ce qui donne les limites entre lesquelles variera cos α et par suite l'angle α.

DISCUSSION

I. — *Conditions pour que chacun des points* P *et* Q *puisse parcourir toute la circonférence sur laquelle il se meut.*

On a vu que cos α peut varier entre

$$\frac{d^2 + a^2 - (b + l)^2}{2ad} \quad \text{et} \quad \frac{(d^2 + a^2) - (b - l)^2}{2ad}.$$

Pour que le point P puisse parcourir toute la circonférence A, il faut que cos α puisse prendre toutes les valeurs de -1 à $+1$.

Or cos α varie toujours entre les deux limites précédentes, il faut donc que la limite inférieure soit plus petite que $-$ et que la limite supérieure soit plus grande que $+1$.

On doit avoir $\dfrac{d^2 + a^2 - (b + l)^2}{2ad} \leqslant -1;$

d'où $$(d + a)^2 - (b + l)^2 \leqslant 0,$$

$$(b + l + a + d)(b + l - a - d) \geqslant 0.$$

Le premier facteur étant positif, on a la condition

(3) $$b + l - a - d \geqslant 0;$$

de plus, $$\frac{d^2 + a^2 - (b - l)^2}{2ad} \geqslant +1$$

d'où $$(d - a)^2 - (b - l)^2 \geqslant 0$$

(4) $$(d - a - b + l)(d - a + b - l) \geqslant 0.$$

Les limites entre lesquelles peut varier cos β sont

$$\frac{(a - l)^2 - (b^2 + d^2)}{2bd} \quad \text{et} \quad \frac{(a + l)^2 - (b^2 + d^2)}{2bd}.$$

Pour que le point Q puisse parcourir toute la circonférence B, il faut que cos β puisse prendre toutes les valeurs de -1 à $+1$, d'où les deux conditions :

1° $$\frac{(a - l)^2 - (b^2 + d^2)}{2bd} \leqslant -1,$$

ou $$(a - l)^2 - (b - d)^2 \leqslant 0,$$

(5) $$(b - d + a - l)(b - d - a + l) \geqslant 0;$$

et 2° $$\frac{(a + l)^2 - (b^2 + d^2)}{2bd} \geqslant +1,$$

ou $$(a + l)^2 - (b + d)^2 \geqslant 0,$$
$$(a + l + b + d)(a + l - b - d \geqslant 0.$$

Comme le premier facteur est positif, on a la condition

(6) $$a + l - b - d \geqslant 0,$$

Dans le produit (4) le second facteur sera négatif, en vertu de l'inégalité (6), donc le premier le sera également; d'où la condition

(4') $$a + b - l - d \geqslant 0.$$

La condition (5) est donc vérifiée d'elle-même, les deux facteurs du produit étant tous les deux positifs.

Il reste donc les trois conditions :

(3) $$b + l - a - d \geqslant 0,$$
(4') $$a + b - l - d \geqslant 0,$$
(6) $$a + l - b - d \geqslant 0,$$

Le premier membre de (3) est
$$l - d - (a - b);$$
celui de (6) est $$l - d + (a - b).$$

Comme $a - b$ est positif, la première quantité est inférieure à la seconde, la condition (3) comprend donc la condition (6); et il reste les deux conditions

(3) $$b + l - a - d \geqslant 0,$$
(4') $$a + b - l - d \geqslant 0.$$

II. — *Conditions pour que l'un des points seul puisse parcourir toute la circonférence sur laquelle il se meut.*

Cherchons les conditions pour que le point Q puisse parcourir toute la circonférence B, le point P ne parcourant qu'une partie de A.

Pour que le point Q puisse parcourir toute la circonférence B, on doit avoir

(6) $$a + l - b - d > 0,$$
(5) $$(b - d - a + l)(b - d + a - l) > 0.$$

Si le point P ne peut parcourir qu'une portion de A, c'est que l'une des limites de $\cos\alpha$ est comprise entre -1 et $+1$.

Supposons que la limite inférieure de $\cos\alpha$ soit comprise de -1 à $+1$.

On a $$\frac{d^2 + a^2 - (b + l)^2}{2ad} > -1;$$

ou $$(d + a)^2 - (b + l)^2 > 0$$

$$(d + a + b + l)(d + a - b - l) > 0,$$

d'où la condition

(7) $$d + a - b - l > 0;$$

et $$\frac{d^2 + a^2 - (b + l)^2}{2ad} < 1,$$

ou $$(d - a)^2 - (b + l)^2 < 0$$

(8) $$(b + l + d - a)(b + l - d + a) > 0.$$

D'après la condition (7), le premier facteur de (5) est négatif; donc

(5') $$d - b - a + l > 0.$$

D'après (5)' $d + l - b - a$ étant positif, *a fortiori* $d + l + b - a$ sera positif; donc le second facteur de (8) sera aussi positif, d'où la condition

(8') $$b + l - d + a > 0.$$

Or, $-b + l - d + a$ est positif d'après (6), donc la condition (6) comprend (8').

Il reste les trois conditions

(6) $$a + l - b - d > 0,$$

(5') $$d + l - a - b > 0,$$

(7) $$d + a - b - l > 0.$$

La discussion serait analogue dans le cas où la limite supérieure de $\cos \alpha$ est comprise entre -1 et $+1$.

III. — *Conditions pour que chacun des deux points ne puisse parcourir qu'une portion de la circonférence.*

Ce cas se présentera quand l'une des limites de $\cos \alpha$ sera comprise entre -1 et $+1$, en même temps qu'une des limites de $\cos A$ sera comprise entre -1 et $+1$. Il se subdivise donc en quatre autres : supposons que ce soit la limite inférieure de $\cos \alpha$ qui soit comprise entre -1 et $+1$ et que ce soit aussi la limite inférieure de $\cos \beta$ qui soit comprise entre -1 et $+1$.

Pour $\cos \alpha$, on a :

(7) $$d + a - b - l > 0,$$

(8) $$(b + l + d - a)(b + l - d + a) > 0.$$

Pour $\cos \beta$, on a

$$\frac{(a-l)^2-(b^2+d^2)}{2bd} > -1;$$

d'où

$$(a-l)^2-(b-d)^2 > 0$$

(9) $$(a-l-b+d)(a-l+b-d) > 0$$

et

$$\frac{(a-l)^2-(b^2+d^2)}{2bd} < 1;$$

d'où

$$(a-l)^2-(b+d)^2 < 0$$

(10) $$(a-l-b-d)(a-l+b+d) < 0.$$

D'après l'inégalité (7), le premier facteur de (9) est positif, d'où

(9)′ $$a-l+b-d > 0.$$

Comme $a-l+b-d$ est positif, *a fortiori* $a-l+b+d$ est positif, donc

(10)′ $$a-l-b-d < 0.$$

Dans (8), le premier facteur sera donc positif; ainsi

(8)′ $$-d+b+l+a > 0.$$

La condition (9′) comprend la condition (8′), il reste donc finalement les condilions

(10′) $$b+l+d-a > 0$$

(9′) $$a-l+b-d > 0$$

(7) $$d+a-b-l > 0.$$

On peut observer que l'une de ces conditions exclut l'autre et qu'on n'aura jamais que deux conditions.

Supposons, par exemple, $l+d-a > 0$.

La condition $b+(l+d-a) > 0$ sera comprise dans la condition $b-(l+d-a) > 0$.

Une discussion analogue, concernant les trois autres cas, donnera les conditions correspondant à chacun d'eux.

IV. — *Conditions pour qu'une droite de longueur* l *ne puisse être placée de façon à avoir une extrémité sur chacune des circonférences données.*

Il suffit que l'un des points, Q par exemple, ne puisse occuper aucune position sur la circonférence.

Ceci aura lieu soit si la limite inférieure de cos β est supérieure à $+1$, soit si la limite supérieure de cos β est inférieure à -1.

1° Je suppose

$$\frac{(a-l)^2-(b^2+d^2)}{2bd} > +1.$$

On en déduit $(a-l)^2-(b+d)^2 > 0,$

$$(a-l-b-d)(a-l+b+d) > 0.$$

Ce qui pourra avoir lieu : 1° si les deux facteurs sont négatifs, et dans ce cas il suffit que le plus grand des deux soit négatif; d'où

(11) $a-l+b+d < 0 \qquad l > a+b+d,$

2° si les deux facteurs sont positifs, et il suffit alors que le plus petit soit positif, d'où

(12) $a-l-b-d > 0 \qquad l < (a-b)-d.$

2° Je suppose

$$\frac{(a+l)^2-(b^2+d^2)}{2bd} < -1,$$

$$(a+l)^2-(b-d)^2 < 0,$$

$$(a+l+b-d)(b-l-a-d) > 0,$$

ce qui aura lieu, soit en supposant

(13) $b-d-a-l > 0, \qquad l < (b-a)-d,$

soit si l'on a

(14) $a+l+b-d < 0 \qquad l < d-(a+b).$

Comme $b-a$ est négatif, la condition (13) ne peut être jamais remplie, il ne reste que les trois conditions (11), (12) et (14).

Une des conditions exclura toujours l'autre.

Circonférences extérieures. — On a $d > a+b$, la condition (14) est donc possible.

Comme d surpasse a, la condition (12) est impossible. On ne pourra donc pas placer la longueur l, si l'on a $l > a+b+d$ ou si $l < d-(a+b)$.

Circonférences sécantes. — Comme l'on a $d < a+b$, la condition (14) n'a jamais lieu, comme $d > a-b$, la condition (12) n'a également jamais lieu. On ne peut donc placer la longueur l que dans le cas où l surpasse $a+b+d$.

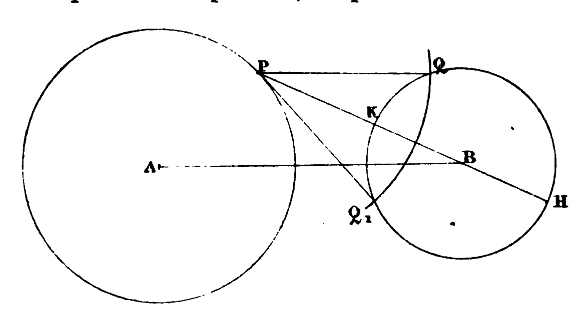
Circonférences intérieures. — L'inégalité (14) ne peut avoir lieu, mais comme $d < (a-b)$, l'inégalité (12) peut être vérifiée. Dans ce cas, on ne pourra pas placer la longueur l si l'on a $\qquad l < a-b-d \qquad$ ou $\qquad l > a+b+d.$

Ces résultats sont évidents géométriquement.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soit P une position particulière de l'extrémité qui se déplace sur la circonférence A.

Pour avoir la position du point Q sur B, correspondant à cette position du point P, du point P comme centre, avec une ouverture de compas égale à l, on décrit une circonférence. Elle coupe la circonférence B en deux points Q et Q_1 qui donnent pour la droite deux positions PQ et PQ_1.



Pour que la circonférence décrite de P coupe la circonférence B, il faut supposer $l > PK$ et $l < PH$.

La première condition équivaut à

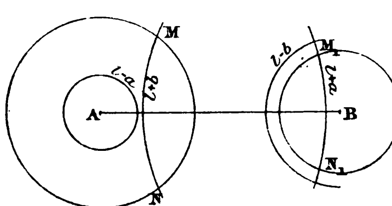
$$l > PB - b, \qquad \text{d'où} \qquad PB < l + b.$$

La deuxième condition peut également s'écrire

$$l < PB + b, \qquad \text{d'où} \qquad PB > l - b.$$

Ceci montre que le point P sera à l'intérieur de la circonférence décrite de B comme centre avec $b + l$ comme rayon, mais qu'il est extérieur à la circonférence décrite de B comme centre avec $l - b$ comme rayon.

De même, si du point A comme centre, avec $a + l$ comme rayon, on décrit une circonférence, le point Q sera à l'intérieur de cette circonférence tandis qu'il sera extérieur à la circonférence décrite de A avec $l - a$ comme rayon.



Pour construire géométriquement les portions de chacune

des circonférences sur lesquelles les extrémités de la droite pourront se déplacer, on construira donc les deux circonférences de centre B, l'arc MN de la circonférence donnée, de centre A, compris à l'intérieur de cette portion annulaire sera parcouru par le point P.

On décrira les deux circonférences de centre A. La portion M_1N_1 de la circonférence B comprise entre ces deux circonférences sera celle sur laquelle l'extrémité Q se déplacera.

On pourrait donc refaire la discussion précédente en s'appuyant sur cette construction. *Rechercher les conditions entre les données pour que* P *puisse parcourir toute la circonférence* A; *et* Q, *toute la circonférence* B; par exemple, reviendrait à chercher les conditions pour que chacune des circonférences données soit comprise, tout entière, entre les deux circonférences auxiliaires décrites du centre de l'autre circonférence (*).

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(SESSION DE JUILLET 1889)

PARIS

1. — Si l'arête latérale d'un tronc de cône est égale à la somme des rayons des bases, le volume du tronc de cône a pour mesure la surface totale multipliée par le $\frac{1}{6}$ de la hauteur.

2. — Discuter l'équation :

$$\cos^2 x - 2m \cos x + 4m^2 + 2m - 1 = 0,$$

suivant les différentes valeurs de m.

---

1. — x et y étant deux quantités positives dont la somme est donnée, dans quel cas le produit $x^m y^n$ est-il maximum ? — Chercher, *comme application*, le cône de révolution inscrit à une sphère donnée ayant le volume maximum. On prendra comme inconnue la hauteur du cône.

2. — Expliquer l'épure donnant l'intersection de deux plans P et Q, en supposant le plan P déterminé par ses traces et le plan Q déterminé par la ligne de terre et un point (a, a').

(*) A propos de cette question qui touche à la théorie du parallélogramme de Watt, on pourra consulter les *Nouvelles Annales* 1848, p. 65, et 1850, p. 143. G. L.

1. — Étant donné un demi-cercle de diamètre AB égal à 2R, déterminer, sur la circonférence, un point M tel que $MA + kMB = 3R$, k désignant une constante donnée positive ou négative. — Discussion.

2. — Démontrer que les forces appliquées à un corps solide peuvent se réduire à deux, dont une passe par un point arbitrairement choisi.

---

1. — Étant donné un trapèze isoscèle ABCD. on le fait tourner autour de sa médiane HI. Calculer le rapport du volume engendré par le trapèze HBCI à la somme des volumes engendrés par les triangles HBO et OCI. — On posera $CD = 2a$, $AB = 2b$, $HI = h$. — Étant donnée la base a, quelle doit être la valeur de la base b pour que le rapport calculé ait une valeur donnée m?

2. — Travail d'une force constante.

---

1. — Pour quelle valeur de a l'expression $\frac{x - a}{x^2 - 3x + 2}$ a-t-elle un maximum et un minimum?

2. — Calculer le demi grand axe de l'orbite de Mercure en prenant pour unité de longueur le demi grand axe de l'orbite terrestre. On sait que la durée de la révolution de Mercure autour du soleil est de 88 jours moyens.

QUESTION 230

Solution par M. A. Boutin, professeur au Collège de Courdemanche.

Démontrer que, dans tout triangle ABC, *les milieux des droites qui joignent deux à deux le point de Nagel et ses points algébriquement adjoints, dans le triangle anticomplémentaire, sont six points d'une même circonférence, qui passe par les sommets du triangle obtenu en menant par les sommets de* ABC *des parallèles aux côtés opposés.* (E. Vigarié.)

Soient $A_1B_1C_1$ le triangle obtenu en menant par A,B,C des parallèles aux côtés opposés; et $A_2B_2C_2$ le triangle qui a pour sommets les centres des cercles ex-inscrits à $A_1B_1C_1$. Soit V le point de Nagel de ABC.

Il résulte, de théorèmes connus, que :

1° V est le centre du cercle inscrit à $A_1B_1C_1$;

2° V est par suite l'orthocentre de $A_2B_2C_2$;

3° A_2,B_2,C_2 sont les points algébriquement adjoints de N dans le triangle $A_1B_1C_1$.

Les six points considérés dans l'énoncé sont donc dans le triangle $A_2B_2C_2$, les milieux des côtés et les milieux des droites qui joignent l'orthocentre V aux sommets; en outre, A_1, B_1, C_1 sont, dans ce triangle, les pieds des hauteurs. Ces neuf points sont donc sur le cercle des neuf points du triangle $A_2B_2C_2$.

QUESTION 300

Solution par M. B. J. SOLLERTINSKY, à Gatschina.

Dans un triangle ABC *mener deux transversales réciproques parallèles respectivement : l'une, à une direction donnée; l'autre, à une autre direction donnée.* (E. Lemoine.)

Menons AA′, BB′, parallèles à une direction donnée Δ', et CC″ parallèle à Δ''. CC″ coupe AA′, BB″ respectivement en D, E. Soient M, M′ les milieux de BC, CA et J le point de rencontre des droites EM, DM′. Les droites JR′, JR″, respectivement parallèles aux directions Δ', Δ'', sont les réciproques cherchées.

En effet, si JR′, JR″ coupent BC en R′, R″ on a

$$R'M = R''M,$$

puisque M est le centre d'homothétie des triangles JR′R″, EBC, etc.

Corollaire. — Puisque JR′, JR″ sont les réciproques, la droite JM′ doit passer par l'intersection de leurs parallèles menées par AB. On retrouve ainsi ce théorème connu :

Si l'on construit sur les côtés d'un triangle, comme diagonales, trois parallélogrammes, ayant leurs côtés parallèles à deux directions données, trois autres diagonales concourent en un même point.

En considérant la perspective de cette figure sur un plan quelconque, non parallèle aux directions données, et en désignont par PQ les points de fuite de ces directions, on retrouve une propriété donnée par M. d'Ocagne (J. S. 1888, p. 242).

On considère un triangle ABC *et deux points* P, Q. *Les points* P, Q *forment, avec deux quelconques des sommets du triangle, un quadrilatère complet ayant pour diagonale la droite* PQ *et le côté du triangle qui joint les sommets considérés. Les troisièmes diagonales de ces quadrilatères complets sont concourantes.*

Nota. — Solution analytique par M. A. Boutin.

Nous ferons observer que les problèmes relatifs aux transversales réciproques peuvent être résolus d'une façon méthodique en observant que : si deux droites δ, δ' sont transversales réciproques dans le plan du triangle ABC, l'une d'elles (arbitrairement choisie) est parallèle aux diamètres de la parabole, inscrite au quadrilatère complet formé par les côtés du triangle ABC et par la seconde transversale

Mais cette considération ne conduit pas toujours au résultat, par la voie la plus simple, comme le prouve l'élégante solution de M. Sollertinsky. G. L.

QUESTION PROPOSÉE

353. — Soient O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC; K le point de Lemoine; α, β, γ, λ les inclinaisons des droites OA, OB, OC, OK sur un axe quelconque. On a

$$\sin(\alpha-\lambda)\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\sin(\beta-\lambda)\sin^2\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$$
$$+\sin(\gamma-\lambda)\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=0.$$

Trouver les relations analogues; K représentant l'orthocentre, ou le centre de gravité, ou le centre du cercle inscrit.

(Neuberg.)

Nota. — Comme nous le fait observer M. B. Sollertinski, la question 351, énoncée dans le précédent numéro, coïncide avec la première partie de la question 150 proposée autrefois par M. Neuberg (*Mathesis*, 1882, p. 144) et résolue dans ce même journal, 1883, p. 86.

D'après ce renseignement, il ne sera pas inséré de solution de cette question. G. L.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 1318-2-90.

SUR LE PENTAGONE RÉGULIER

Par M. **J. Cernesson**, professeur au Lycée de Sens.

EXPRESSION *DIRECTE* DU COTÉ DU PENTAGONE RÉGULIER, EN FONCTION DU RAYON R DU CERCLE CIRCONSCRIT.

1. — Proposons-nous d'abord la question suivante :

Connaissant le rayon R *d'un cercle, la longueur* a *d'une corde, calculer la longueur* x *de la corde qui sous-tend l'arc triple de l'arc sous-tendu par* a.

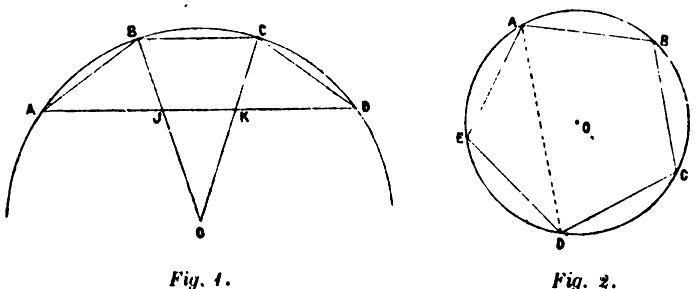


Fig. 1. *Fig. 2.*

Soient AB $= a$ la corde donnée. Inscrivons deux cordes égales à a, BC et CD.

Traçons BO, CO, qui coupent respectivement AD en I et en K.

Les triangles semblables BOC, IOK, ABI donnent

(1) $$\frac{\mathrm{IK}}{a} = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{R}},$$

(2) $$\frac{\mathrm{BI}}{a} = \frac{\mathrm{IK}}{\mathrm{OI}};$$

d'où

(3) $$\mathrm{BI} = \frac{a^2}{\mathrm{R}}.$$

On trouve ensuite, successivement :

$$OI = R - BI = \frac{R^2 - a^2}{R};$$

puis, à l'aide de (1),

$$IK = \frac{a(R^2 - a^2)}{R^2}.$$

Finalement $x = AD = 2a + IK = 2a + \frac{a(R^2 - a^2)}{R^2}$,

et, par conséquent,

(4) $$x = \frac{3aR^2 - a^3}{R^2}.$$

2. — Cela posé, soit ABCDE l'un quelconque des deux pentagones réguliers inscrits dans le cercle O de rayon R.

Soit $AB = a$.

L'expression de la diagonale AD qui sous-tend un arc AED, *double* de l'arc AE, est connue :

(5) $$\overline{AD}^2 = \frac{a^2(4R^2 - a^2)}{R^2}.$$

Mais AD peut être considéré comme sous-tendant un arc triple de AB, et la formule (4) donne

(6) $$\overline{AD}^2 = \frac{a^2(3R^2 - a^2)^2}{R^4}.$$

Égalant ces deux expressions de $\overline{AD}^2$, on a :

$$\frac{a^2(4R^2 - a^2)}{R^2} = \frac{a^2(3R^2 - a^2)^2}{R^4};$$

d'où, en réduisant :

(7) $$a^4 - 5R^2a^2 + 5R^4 = 0.$$

Les racines positives de cette équation sont les expressions des côtés des deux pentagones ;

$$a' = \frac{R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2},$$

$$a'' = \frac{R\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}.$$

THÉORÈMES SUR LES TRANSVERSALES

Par M. E. Lauvernay, professeur au Lycée de Caen.

(*Suite*, voir p. 11.)

Le théorème général précédent donne lieu par l'inversion, en prenant le point O pour centre d'inversion, à la propriété suivante :

Propriété générale. -- *Si, d'un point quelconque* O *du plan d'un polygone, on abaisse les perpendiculaires sur les côtés, et que l'on prenne, sur chacune, le point* ω_a *tel que*

$$O\omega_a = K \cdot a,$$

K *étant un nombre quelconque, les circonférences décrites sur* $O\omega_a$, $O\omega_b$,... *comme diamètres, sont telles que si l'on mène, par le point* O, *une transversale arbitraire, la somme algébrique des cordes, ainsi déterminées sur cette transversale, est nulle.*

En effet, d'après l'inversion, on a :

$$OA'OA'' = a'. O\omega_a = Kaa';$$

donc
$$K\frac{aa'}{\alpha} = OA',$$

par suite
$$\Sigma(OA'') = o.$$

Dans certains cas particuliers, cet énoncé prend encore une forme plus simple. Par exemple, si O est le centre de gravité du triangle ABC, et si de ce point, comme centre, on décrit une circonférence quelconque, les trois circonférences passant par le centre de gravité et les deux points de rencontre (réels ou imaginaires) de cette circonférence avec chaque côté, sont telles, que si l'on mène, par le centre de gravité, une droite quelconque, la somme algébrique des trois cordes, ainsi déterminées sur cette transversale, est nulle.

Théorème II. — *Si, par un point quelconque* O *du plan d'un triangle, on mène une transversale arbitraire* A'C'B', *on a la*

relation

$$\frac{aa'}{b''c''}+\frac{bb'}{c''a''}+\frac{cc'}{a''b''}=0.$$

a, a′, b,... *désignant les éléments précédemment considérés; a″, b″, c″ étant les distances algébriques des trois sommets du triangle à cette transversale.*

Par le point O, menons OMN parallèle au côté BC. M, N étant les points de rencontre avec AB, AC, on a :

$$\frac{OM}{ON}=\frac{\text{tr. OAM}}{\text{tr. OAN}}=\frac{AM(-c')}{AN.b'}=\frac{-AB.c'}{Ac.b'}=\frac{-c.c'}{b.b'}.$$

Or, si l'on prolonge AO jusqu'à sa rencontre en I avec BC, et qu'on abaisse IK perpendiculaire sur la transversale, on a

$$\frac{OM}{ON}=\frac{IB}{IC}=\frac{IK-(-b'')}{IK+c''}=\frac{IK+b''}{IK+c''},$$

donc $$bb'(IK+b'')=-cc'(IK+c'')$$

ou

(1) $$bb'b''+cc'c''+IK(bb'+cc')=0.$$

Les triangles semblables OAE, OIK donnent :

$$\frac{IK}{a''}=\frac{IO}{OA}=\frac{a'}{AH}=\frac{aa'}{a.AH'},$$

AH′ étant la perpendiculaire sur MN.

D'autre part, d'après l'expression de l'aire du triangle, on a :

$$\frac{a}{2}AH'=\frac{a}{2}(h_a-HH')=ABC-OBC$$

$$=PAC-PBO=OAC-OAB=\frac{bb'+cc'}{2},$$

P étant le point de rencontre de OC avec le côté AB. Donc :

$$\frac{IK}{a''}=\frac{aa'}{bb'+cc'};$$

et, par substitution dans la relation (1),

$$bb'b''+cc'c''+aa'a''=0,$$ C. Q. F. D.

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait ci-dessus, permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème général. — *Si, par un point quelconque O du plan d'un polygone, on mène une transversale quelconque, on a la*

relation $$\sum\left(\frac{aa'}{a''b''}\right) = 0;$$

a″, b″ *étant les distances algébriques des extrémités du côté* a *à la transversale;* b″, c″ *celles des extrémités du côté consécutif* b *à cette même transversale, etc.*

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **L. Benezech.**

Le théorème indiqué par M. Lauvernay (*) peut être considéré comme étant un cas particulier de cette proposition générale :

Théorème. — *Soient* a, b, c, ... l *les longueurs des côtés successifs d'un polygone* ABC ... L *de* n *côtés, et* O_a, O_b, O_c ... O_l n *points quelconques, correspondant à chacun de ces côtés. Si, par ces points, on mène des parallèles* $O_a\omega_a$, $O_b\omega_b$, . . $O_l\omega_l$ *à une même direction arbitraire, limitées aux côtés correspondants du polygone, on a :*

$$\frac{ap_a}{\alpha} + \frac{bp_b}{\beta} + \ldots + \frac{lp_l}{\lambda} = 0.$$

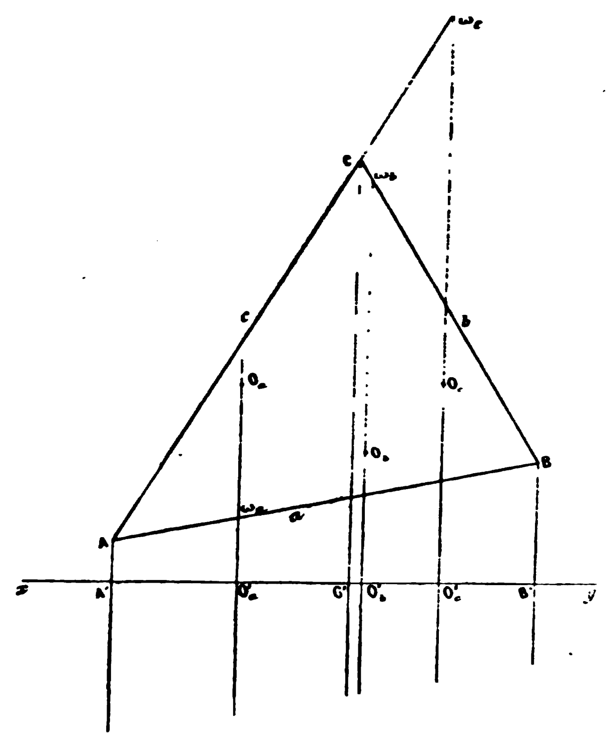
Nota. — p_a, p_b, ... p_l désignent les distances des points O_a, O_b, ... O_l aux côtés AB, BC, ... du polygone, avec la convention ordinaire des signes; et α, β, ... λ les longueurs algébriques de $O_a\omega_a$, $O_b\omega_b$, ... $O_p\omega_p$.

1° Cas du triangle.

Soient A′, B′, C′, O'_a, O'_b, O'_c les points, où les parallèles, menées par les sommets du triangle et par les trois points considérés, coupent une droite xy perpendiculaire à leur direction. On a :

$$ap_a = -\alpha(O'_aA' + O'_aB'),$$
$$bp_b = \beta(O'_bB' + O'_bC'),$$
$$cp_c = \gamma(O'_cA' - O'_cC'),$$

(*) Voir *Journal*, p. 11.



d'où :

$$\frac{ap_a}{\alpha} + \frac{bp_b}{\beta} + \frac{cp_c}{\gamma} = A'O'_c - A'O'_a + B'O'_b - B'O'_a + C'O'_b - C'O'_c$$
$$= O'_aO'_c - O'_bO'_a - O'_bO'_c = 0.$$

2° Généralisation.

Supposons la propriété vraie pour un polygone ABC...L de n côtés et démontrons qu'elle subsiste pour un polygone ABC...LM de $n + 1$ côtés.

On a :

$$(1) \qquad \frac{ap_a}{\alpha} + \frac{bp_b}{\beta} + \ldots + \frac{kp_k}{\varkappa} + \frac{lp_l}{\lambda} = 0.$$

Prolongeons $O_l\omega_l$ jusqu'à son point de recontre $\omega_{l'}$, avec LH; menons par un point quelconque, O_m, une parallèle $O_m\omega_m$ à

$O_l\omega_l$, limitée au côté MA; désignons enfin, par l', m les côtés LM, MA; par λ', μ, les longueurs algébriques de $O_l\omega_{l'}$, $O_m\omega_m$; et par $p_{l'}$, p_m les distances des points O_l, O_m aux côtés LM, MA.

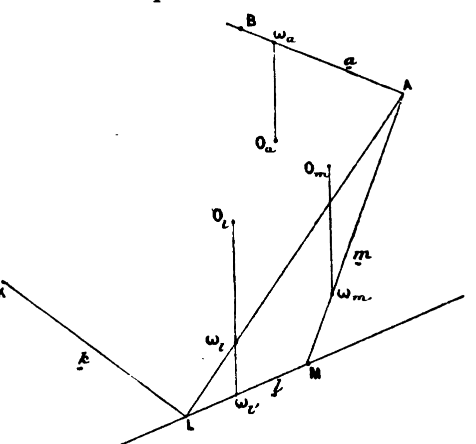
Le triangle LMA donne :

$$\frac{l'p_{l'}}{\lambda'} + \frac{mp_m}{\mu} - \frac{lp_l}{\lambda} = 0. \tag{2}$$

Ajoutant (1) et (2), il vient :

$$\frac{ap_a}{\alpha} + \ldots + \frac{kp_k}{\chi} + \frac{l'p_{l'}}{\lambda'} + \frac{mp_m}{\mu} = 0.$$

On observera que la marche adoptée dans les démonstrations précédentes, est analogue à celle qu'a suivie M. Lauvernay. On peut d'ailleurs, en utilisant ce théorème, arriver très rapidement au résultat. Il suffit d'observer que, en désignant, pour un point quelconque du plan, par p'_a, α' les quantités analogues à p_a et α correspondant au point O_a, on a : $\frac{p_a}{\alpha} = \frac{p'_a}{\alpha'}$.



ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Auguste Morel.**

(*Suite*, voir p. 29.)

---

7. — On peut donner, de cet important théorème, une autre démonstration, en partant de la considération d'un cercle particulier, lié au foyer et à la directrice de la conique don-

née, cercle que j'appellerai *cercle excentrique*. Ce cercle est défini de la façon suivante :

Je prends, dans le plan de la courbe, un point quelconque E; de ce point E, je mène à la directrice la perpendiculaire EZ; et, du point E comme centre, je décris un cercle dont le rayon est K.EZ ; ce cercle est le cercle excentrique, correspondant au point considéré E.

Les propriétés de ce cercle forment la base du traité de Bos-

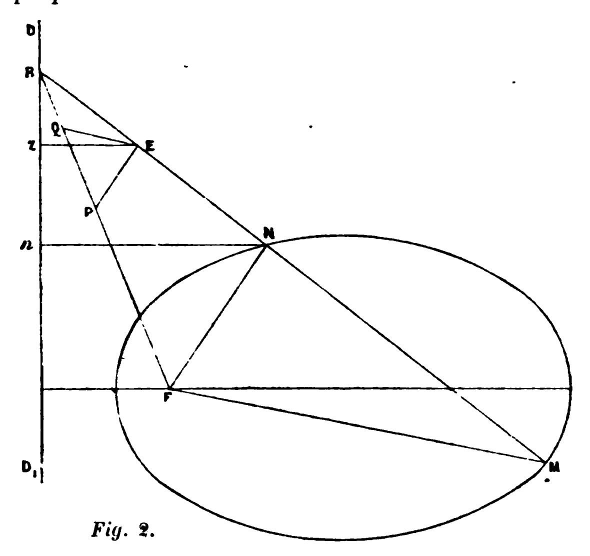


Fig. 2.

covich, publié à Venise en 1757, dans ses *Elementa universæ Matheseos*, sous le titre : *Sectionum conicarum elementa, nova quodam methodo concinnata.*

Ce cercle a été employé, à nouveau, par M. Ch. Taylor, dans un ouvrage publié, en 1881, à Cambridge, sous le titre : *An introduction to the ancient and modern geometry of conics.* C'est à cet auteur qu'est empruntée la dénomination de cercle excentrique du point E.

Cela posé, considérons une section conique, une droite MNR, rencontrant la courbe au point N, et la direction au point R; traçons FR et prenons, sur NR, un point quelconque E; menons EZ perpendiculaire à la directrice.

Ensuite, je joins le point F au point N, et par le point E je mène EP parallèle à FN; enfin je mène Nn perpendiculaire à la directrice.

Les deux triangles REP, RNF sont semblables, et donnent

$$\frac{EF}{NF} = \frac{RE}{NR}.$$

D'autre part, les triangles REZ, RNn donnent aussi

$$\frac{EZ}{Nn} = \frac{RE}{RN}.$$

On a donc
$$\frac{EP}{EZ} = \frac{NF}{Nn} = k.$$

Ainsi, le point P se trouve sur le cercle excentrique du point E. Il est aussi sur la droite FR. Par conséquent, à chaque point de rencontre de la conique avec la droite RN, qui coupe la directrice au point R, correspond un point de rencontre de la droite FR avec le cercle excentrique d'un point quelconque de la droite RN.

Or, une droite telle que FR ne peut rencontrer un cercle qu'en deux points. Donc la droite RN ne peut rencontrer la conique qu'en deux points.

8. Remarque. — La considération du cercle excentrique du point E permet d'établir le premier théorème énoncé.

En effet, le cercle excentrique du point E rencontre FR en deux points P et Q, et les angles EPR, EQF sont égaux, comme angles extérieurs à la base d'un triangle isoscèle. Donc, FM et FN étant respectivement parallèles à EP et à EQ, les rayons vecteurs des points M et N sont également inclinés sur FR.

9. Théorème. — *La tangente en un point* M *d'une section conique rencontre la directrice en un point* R; *l'angle* MFR *est droit.*

En effet, si les deux points M et N sont confondus, il en est de même des deux points P et Q; dans ce cas, la droite FR étant tangenle au cercle excentrique du point E, le rayon ES est perpendiculaire à FR; il en est donc de même de FM, qui est parallèle à ES.

10. Théorème. — ***D'un point donné, on ne peut pas mener plus de deux tangentes à une conique.***

Soit, en effet, le point donné P; et soit PM une tangente, qui rencontre la directrice au point Q. On mène la ligne FQ; d'après ce qui précède, elle est tangente au cercle excentrique du point P. Ainsi, pour avoir une tangente à la conique par le point P, je trace le cercle excentrique du point P; puis je mène, par le point F, une tangente à ce cercle; elle rencontre la directrice au point Q; la ligne OP est tangente à la conique.

Or, du point F, on ne peut mener que deux tangentes au cercle excentrique du point P ; donc, il n'existe que deux tangentes à la conique donnée passant par P.

11. — On appelle *degré* d'une courbe le nombre indiquant en combien de points *au plus* une droite peut rencontrer cette courbe. La *classe* d'une courbe est le nombre de tangentes menées à cette courbe par un point quelconque de son plan. Ainsi, d'après les théorèmes précédents :

Toute conique est une courbe du second degré et de la seconde classe.

12. Problème. — *Construire une conique connaissant le foyer, la directrice et l'excentricité.*

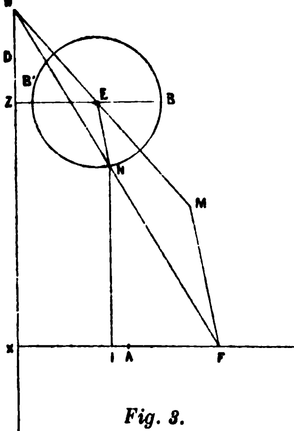


Fig. 3.

La section conique ne peut se construire que par points. Cherchons donc un point quelconque de la courbe.

Déterminons d'abord les points situés sur l'axe.

Lorsque l'excentricité est égale à l'unité, il y a un point de la courbe, et un seul, situé sur l'axe; c'est le milieu de FX. Soit A ce point; c'est le point que nous avons appelé le sommet de la parabole.

Si l'excentricité est plus petite que l'unité, je trouverai sur

l'axe deux points A et A', et l'on aura

$$\frac{FA}{AX} = \frac{FA'}{A'X} = k.$$

Le point A est situé entre F et X; mais le point A' est au delà du point F, sur la droite XF. Donc l'ellipse a deux sommets situés du même côté de la directrice correspondant au foyer F.

Lorsque l'excentricité est plus grande que l'unité, il existe encore sur l'axe deux points A et A', tels que l'on ait

$$\frac{FA}{AX} = \frac{FA'}{A'X} = k.$$

Le point A est toujours situé entre F et X; mais le point A' est au delà du point X, sur la droite FX. Donc, les deux sommets de l'hyperbole sont situés de part et d'autre de la directrice correspondant au foyer F.

13. — Cela posé, proposons-nous de déterminer la courbe par points, au moyen des rayons vecteurs issus du point F. Pour cela, considérons le cercle excentrique dont le centre est E. D'après ce qu'on a vu plus haut, on obtient un point de la courbe en menant par le point F une droite FH qui rencontre le cercle excentrique au point N, et la directrice au point H. Menons EH et EN; par F, traçons la droite FM parallèle à EN et rencontrant EH au point M. Le point M est un point de la courbe, et FM est son rayon vecteur.

Cette construction permettra de déterminer les points situés sur l'axe, si je prends le point N sur l'un des rayons du cercle excentrique parallèle à l'axe; elle permettra aussi de trouver un point dont le rayon vecteur ait une direction donnée : il suffit de mener, dans le cercle excentrique, le diamètre parallèle à cette direction, ce qui donnera deux points tels que N. On en déduit les points correspondants, analogues à M.

Je vais, en outre, déterminer la longueur du rayon vecteur, et étudier la variation de cette longueur avec la direction du rayon.

Les triangles HEN, HFM sont semblables, et donnent

$$\frac{FM}{EN} = \frac{FH}{NH}.$$

D'autre part, par le point N traçons une parallèle à la direc-

trice, rencontrant l'axe au point I; on a

$$\frac{FH}{NH} = \frac{FX}{IX}.$$

Donc

$$\frac{FM}{EN} = \frac{FX}{IX}.$$

Ainsi EN et FX étant constants, le rayon vecteur varie en raison inverse de la distance du point I au point X.

Cela va nous permettre de mettre en évidence certaines propriétés des coniques, en étudiant séparément les trois courbes.

14. — Supposons d'abord que la courbe soit une ellipse; l'excentricité est alors inférieure à l'unité et le cercle excentrique, décrit du point E comme centre, ne coupe pas la directrice.

Je considère un point mobile se déplaçant sur ce cercle depuis le point B, le plus éloigné de la directrice, et parcourant d'abord la demi-circonférence BNB'. Alors le point I se déplace constamment en se rapprochant du point X. Le rayon vecteur, mené de F, décrit la portion de plan AMA', et il va constamment en croissant, depuis FA jusqu'à FA'.

Lorsque le point mobile est en B, sa projection est en b, et l'on a $bX = BZ$; par suite,

$$bX = EN\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

D'autre part, en appelant A le sommet situé entre F et X, on a

$$FX = FA + AX = FA\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

D'après cela, en appelant r le rayon vecteur dans cette position particulière, on peut écrire

$$r = \frac{EN . FA\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{EN\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = FA.$$

Ce résultat s'accorde du reste avec la construction précédemment indiquée.

On verrait de même que, le point mobile étant en B', on retrouve le sommet A'. Donc le rayon vecteur minimum est

celui qui est compté sur l'axe entre le foyer et la directrice; le rayon maximum est compté sur l'axe au delà du point F; du reste, le rayon vecteur varie d'une manière continue entre ces deux valeurs.

Si le point mobile décrit la seconde demi-circonférence, de B′ en B; le rayon vecteur parcourra la seconde région du plan, en se déplaçant de la position FA′ pour revenir à la position FA; et comme IX est croissant, le rayon vecteur est décroissant.

De plus, ayant pris deux points N et N′, symétriques par rapport au diamètre BB′, les rayons EN et EN′ seront également inclinés sur BB′; donc les rayons vecteurs FM et FM′ seront également inclinés sur l'axe AA′; comme, de plus, les deux points N et N′ ont une même projection I sur l'axe FX, les lignes FM et FM′ sont égales et les points M et M′ sont symétriques par rapport à l'axe de la courbe.

15. — Si l'excentricité est égale à l'unité, c'est-à-dire si la courbe est une parabole, le cercle excentrique touche la directrice; alors le point B′ étant sur la directrice, le point *b′* est confondu avec le point X. On démontrerait, comme précédemment, que, au point B, correspondra le sommet A; que le rayon vecteur ira toujours en croissant; mais, lorsqu'il se rapprochera de la partie de l'axe située au delà du point F, la distance du point F à l'extrémité du rayon vecteur augmentera au delà de toute limite. La courbe s'étendra donc indéfiniment, d'un côté de la directrice.

D'ailleurs, à des positions symétriques du rayon vecteur, par rapport à l'axe, correspondront des longueurs égales de ce rayon vecteur; donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe.

16. — Enfin, supposons que l'excentricité soit supérieure à l'unité. Alors le cercle excentrique rencontre la directrice en deux points P et P′, symétriquement placés par rapport au diamètre BB′.

Je fais encore mouvoir un point sur le cercle excentrique, à partir du point B. Tant qu'il parcourra l'axe BLP, le rayon

vecteur ira en croissant, en partant de la position FA; puis, lorsque le point mobile s'approchera indéfiniment du point P, le rayon vecteur croîtra au delà de toute limite, en s'approchant de la direction PE. Si le point mobile parcourt l'axe BL'P', symétrique du précédent, on obtiendra un arc de courbe symétrique du premier par rapport à l'axe, et le rayon vecteur deviendra aussi infini dans la direction P'E. Il y aura donc deux directions donnant des rayons vecteurs infinis.

Si le point qui se déplace sur le cercle excentrique parcourt

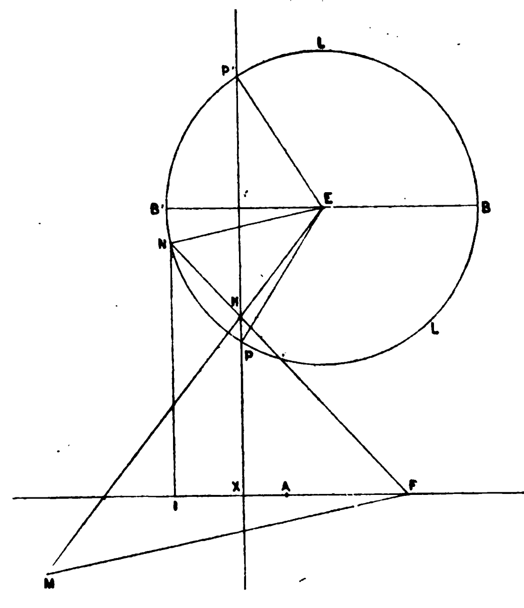


Fig. 4.

l'arc PB', situé au delà de la directrice, par rapport au foyer F, il est facile de voir que les points de rencontre, analogues au point M, se trouvent au delà de la directrice, mais au-dessous de l'axe; le rayon vecteur est d'abord infiniment grand, lorsque le point mobile est en P; puis il va en diminuant. Lorsque le point mobile est en B', l'extrémité du rayon vecteur se retrouve sur l'axe, en A'; puis, le mobile décrivant l'arc B'P', l'extrémité du rayon vecteur parcourt un arc de courbe partant du

point A′, et symétrique du précédent; il est donc situé au-dessus de l'axe.

Il en résulte que l'hyperbole complète se compose de deux branches distinctes; symétriques, chacune, par rapport à l'axe FX, et s'étendant, à l'infini, dans les deux directions définies par les droites PE et P′E; ces deux branches sont situées de part et d'autre de la directrice DD_1.

17. Théorème. — *Si d'un point* T, *pris sur la tangente en* M *à une conique, on abaisse des perpendiculaires* TL *et* TH *sur le rayon vecteur* FM *et sur la directrice, le rapport de* FL *à* TH *est constant, et égal à l'excentricité.*

Pour le démontrer, menons Mm perpendiculaire sur la directrice, et joignons le foyer F au point R où la tangente MR rencontre la directrice. On sait que FR est perpendiculaire à FM; par suite, FR est parallèle à TL.

Fig. 5.

On a donc

$$\frac{FL}{MF} = \frac{RT}{RM} = \frac{TH}{Mm}.$$

En comparant le premier et le dernier rapport, il vient

$$\frac{FL}{TH} = \frac{FM}{Mm} = k. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

18. Théorème. — *La droite qui joint le foyer au point de concours de deux tangentes est également inclinée sur les rayons vecteurs qui vont aux points de contact de ces deux tangentes.*

Soit T le point de concours des deux tangentes. Du point T, comme centre, décrivons le cercle excentrique. On sait que si l'on joint le foyer F au point H où l'une des tangentes rencontre la directrice, la droite FH est tangente au cercle excentrique, et, si *m* est le point de contact du cercle et de FH, et M le point de contact de TH avec la conique, les droites T*m* et FM sont parallèles.

Cela posé, les deux rayons Tm et Tn du cercle sont également inclinés sur la ligne FT; il en est donc de même des rayons vecteurs FM, FN.

19. Remarque. — Dans le cas de l'ellipse ou de la parabole, le rayon FT est toujours bissecteur de l'angle formé par les deux rayons vecteurs menés aux points de contact. Il en est encore de même dans l'hyperbole, si les points de contact sont situés sur une même branche; mais si les points de contact sont sur deux branches différentes, la droite FT est bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et par le prolongement de l'autre.

20. Théorème. — *Si l'on joint le foyer au point de concours de deux tangentes, et au point où la corde des contacts rencontre la directrice, on obtient deux droites rectangulaires.*

En effet, nous avons vu précédemment que la ligne qui joint le foyer au point de concours de la directrice et d'une corde, est également inclinée sur les rayons vecteurs passant par les points de rencontre de la courbe et de la droite.

21. Théorème. — *La normale au point* M *rencontre l'axe en un point* G *tel que le rapport de* FG *à* FM *est égal à l'excentricité.*

Pour le démontrer, observons que la tangente en M rencontrant la directrice en R, l'angle MFR est droit. Par suite, la circonférence décrite sur MR comme diamètre passe par le point F, et aussi par le point m, projection de M sur la directrice. La normale est tangente en M à cette circonférence; il en résulte que l'angle

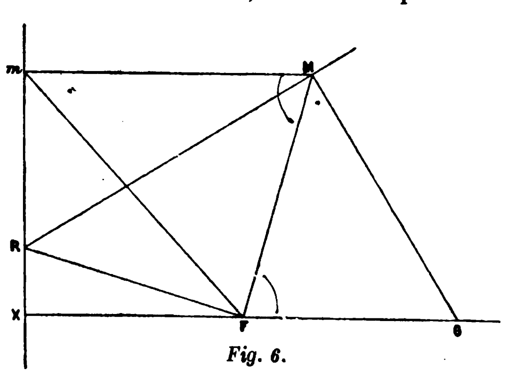


Fig. 6.

FMG est égal à l'angle MmF. De même, les parallèles Mm et FG donnent mMF = MFG.

Donc les triangles semblables MmF, MFF, donnent

$$\frac{FG}{FM} = \frac{MF}{Mm} = k.$$

22. Théorème. — *Si, par un point quelconque d'une conique, on mène une parallèle à une direction fixe, jusqu'à sa rencontre avec la directrice; le rapport du rayon vecteur, à cette ligne, reste constant, si la direction considérée est invariable.*

En effet, le triangle MmP reste constant d'espèce, puisque ses côtés conservent toujours la même direction. Donc, en appelant λ une constante qui dépend de la direction donnée, on peut écrire

$$\frac{Mm}{MP} = \lambda.$$

D'autre part, on a, par définition de la conique

$$\frac{MF}{Mm} = k.$$

De ces égalités, on conclut

$$\frac{MF}{MP} = k\lambda.$$

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin.**

(*Suite*, voir page 277.)

---

140. — θ étant l'angle de Brocard, d'un triangle ABC, et φ un angle tel que

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C,$$

on a les identités (voir *J. M. E.* 1888, p. 222) :

$$\Sigma \cos^2 A = \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 3}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1},$$

$$\Sigma \sin^2 A = \frac{2}{1 - \cot\varphi \operatorname{tg}\theta},$$

$$\Sigma \cos^2 A \cos^2 B = \frac{3 - 2 \operatorname{tg}\varphi \cot\theta + \operatorname{tg}^2\varphi}{(1 - \operatorname{tg}\varphi \cot\theta)^2},$$

$$\Sigma \sin^2 A \sin^2 B = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi(1 + \cot^2\theta)}{(1 - \operatorname{tg}\varphi \cot\theta)^2} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2(\theta - \varphi)},$$

$$\Sigma \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = \operatorname{tg}\varphi \cot\theta,$$

$$\Sigma \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg} B = \operatorname{tg}\varphi(\operatorname{tg}\varphi \cot\theta - 3),$$

$$\Sigma \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B = \operatorname{tg}^2\varphi(\cot^2\theta - 2),$$

$$(1 + \operatorname{tg}^2 A)(1 + \operatorname{tg}^2 B)(1 + \operatorname{tg}^2 C) = (1 - \operatorname{tg}\varphi \cot\theta)^2,$$

$$\Sigma \cot^2 A \cot B = \cot\theta - 3 \cot\varphi,$$

$$\Sigma \cot^2 A \cot^2 B = 1 - 2 \cot\varphi \cot\theta,$$

$$(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \cot\theta - \cot\varphi,$$

$$(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B)(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A) = \operatorname{tg}\varphi(\cot\theta - 1),$$

$$(1 + \cot A)(1 + \cot B)(1 + \cot C) = 2 + \cot\varphi + \cot\theta,$$

$$(1 + \operatorname{tg} A)(1 + \operatorname{tg} B)(1 + \operatorname{tg} C) = 1 + 2 \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi \cot\theta,$$

$$\Sigma \frac{1}{1 + \operatorname{tg} A} = 1 + \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi \cot\theta},$$

$$\Sigma \frac{1}{1 + \cot A} = \frac{4 + 2\cot\theta}{2 + \cot\varphi + \cot\theta},$$

$$\Sigma \sin^3 A \cos A = \frac{\cot\theta + 3\cot\varphi}{(\cot\theta - \cot\varphi)^2},$$

$$\Sigma \sin A \cos^3 A = \frac{\cot\theta - 5\cot\varphi}{(\cot\theta - \cot\varphi)^2},$$

$$\Sigma \sin A \cos(A + \theta) = 0,$$

$$\Sigma \sin A \cos(A - \theta) = \frac{4\cos\theta}{\cot\theta - \cot\varphi},$$

$$\Sigma \sin A \sin(A + \theta) = \frac{2\sin\varphi}{\sin(\varphi - \theta)},$$

$$\Sigma \cos A \sin(A + \theta) = 3\sin\theta,$$

$$\Sigma \sin A \cos(A + \varphi) = -2\sin\varphi,$$

$$\Sigma \cos 2B \cos 2C = \frac{4(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)}{(1 - \operatorname{tg}\varphi \cot\theta)^2} - 1,$$

$$\Sigma \sin 2B \sin 2C = \frac{4 \operatorname{tg}\varphi(\operatorname{tg}\varphi + \cot\theta)}{(1 - \operatorname{tg}\varphi \cot\theta)^2},$$

$$\Sigma \frac{1}{\cos^2 A} = 3 - 2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta + \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

$$(1 - \operatorname{tg}^2 A)(1 - \operatorname{tg}^2 B)(1 - \operatorname{tg}^2 C) = (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta)^2 - 4 \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

$$\cos 2A \cos 2B \cos 2C = 1 + \frac{4 \operatorname{tg} \varphi (\operatorname{cotg} \theta - \operatorname{tg} \varphi)}{(1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta)^2},$$

$$\operatorname{coséc} 2A \operatorname{coséc} 2B \operatorname{coséc} 2C = \frac{(1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta)^2}{8 \operatorname{tg} \varphi},$$

$$\Sigma \operatorname{séc} 2A = \frac{4(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) - (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta)^2}{(1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta)^2 - 4 \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

$$\Sigma \operatorname{coséc} 2A = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{cotg} \theta),$$

$$\Sigma \sin^2 2A = \frac{8 \operatorname{tg} \varphi (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{cotg} \theta)}{(1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta)^2} = -\frac{8 \sin \varphi \sin \theta \cos(\varphi + \theta)}{\sin^2 (\theta - \varphi)},$$

$$\Sigma \cos^2 2A = \frac{3 - 8 \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{cotg}^2 \theta}{(1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta)^2},$$

$$\Sigma \cos 4A = 3 + \frac{16 \operatorname{tg} \varphi (\operatorname{cotg} \theta - \operatorname{tg} \varphi)}{(1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta)^2},$$

$$\Sigma \sin 4A = -\frac{32 \operatorname{tg} \varphi}{(1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta)^2}.$$

Nota. — Ces formules permettent d'exprimer un certain nombre de fonctions symétriques de lignes trigonométriques d'angles d'un triangle, en fonction de $\operatorname{tg} \varphi$ et $\operatorname{cotg} \theta$ seulement, ce qui permet de vérifier très simplement un grand nombre d'identités, et de simplifier certains calculs qui se présentent dans la Géométrie du triangle.

141. — a, b, c étant des angles quelconques, vérifier les identités :

1° $\cos 3a \cos a \sin^2 a + \sin 3a \sin a \cos^2 a + \cos 2a \cos 4a = \cos^3 2a$;

2° $\cos 3a \sin^3 a - \sin 3a \cos^3 a = \sin a \cos a (2 \cos^2 2a - 1) - 2 \sin 2a \cos^2 2a$;

3° $\Sigma \cos (b+c-a) \sin^2 (b-c) = 2\Sigma \cos a \sin (a-c) \sin (a-b)$;

4° $\Sigma \sin (b+c-a) \sin^2 (b-c) = 2\Sigma \sin a \sin (a-c) \sin (a-b)$;

5° $\Sigma \sin (b+c-a) \sin^2 a = 2 \sin a \sin b \sin c + \sin (b+c-a) \sin (a+c-b) \sin (a+b-c)$;

6° $\Sigma \cos(b+c-a)\cos^2 a = 2\cos a \cos b \cos c$
$+ \cos(b+c-a)\cos(a+c-b)\sin(a+b-c)$;

7° $\Sigma \cos 2a \cos^2(b+c) = 2\cos(a+b)\cos(b+c)\cos(c+a)$
$+ \cos 2a \cos 2b \cos 2c$;

8° $\Sigma \sin 2a \sin^2(b+c) = \sin 2a . \sin 2b . \sin 2c$
$+ 2\sin(a+b)\sin(a+c)\sin(b+c)$.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

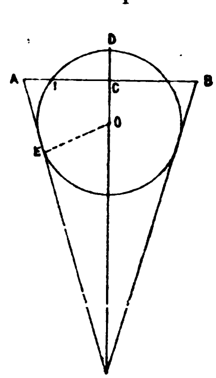
PARIS (Novembre 1889) (*).

1re série. — 1° Résoudre le système

$$a(x-y) = 2 + 2xy,$$
$$A + B(x+y) + Cxy = 0.$$

On supposera, pour discuter, $AC - B^2 > 0$ et l'on cherchera entre quelles limites doit être comprise la quantité a pour que les valeurs de x et de y soient réelles.

2° Trois forces appliquées à un corps solide libre se font équilibre; démontrer qu'elles sont nécessairement situées dans un même plan.



2e série. — 1° Étant donné un cône dont le rayon de base est r et la hauteur h, on inscrit, à ce cône, une sphère de rayon R, comme l'indique la figure. Calculer le volume de la portion de sphère qui se trouve au-dessus de la base du cône.

Application au cas où l'on a

$$h = 3R, \quad r = R\sqrt{3}.$$

2° Composition de deux forces parallèles et de sens contraires.

Série supplémentaire. — 1° Résoudre le système des deux équations

$$x^2 + y^2 = 85,$$
$$xy = 42.$$

2° On donne les trois côtés a, b, c d'un triangle, calculer tang $\frac{1}{2}$A, et rendre la formule calculable par logarithmes.

(*) Énoncés empruntés à la collection publiée par la librairie Croville-Morant, 20, rue de la Sorbonne. Les solutions des questions posées aux examens de Paris sont développées dans ce recueil.

DIJON (Novembre 1889).

1. — Dans un angle x et dans l'angle adjacent supplémentaire, on inscrit deux circonférences d'un même rayon donné r; quelle est la valeur de x pour laquelle la somme des aires comprises dans chaque angle entre ses côtés et l'arc de la circonférence inscrite qui a le point de contact pour extrémité, est la plus petite possible?

2. — Résoudre les équations

$$x^2 + 3xy - 2y^2 = 4,$$
$$2x^2 - 5xy + x^2 = 13.$$

3. — Dans un tétraèdre OABC, dont les trois arêtes OA, OB, OC sont égales entre elles, ainsi que les angles plans BOC, COA, AOB qu'elles comprennent deux à deux, calculer (par leurs lignes trigonométriques) les angles rectilignes des dièdres OA, BC en fonction de la valeur commune ω des angles plans dont il s'agit BOC, etc.

4. — En appelant α la trace d'un plan donné, sur la ligne de terre, M un point quelconque situé sur ce plan et m la projection horizontale de M, on demande de déterminer le point M de telle sorte que les distances αM, αm soient respectivement égales à deux longueurs données.

5. — Résoudre l'équation

$$\sqrt{x+a} - \sqrt[3]{x-a} = b.$$

QUESTION 225

Solution par M. A. Boutin.

1° L'orthocentre, le point de Lemoine et le point de Lemoine du triangle orthocentrique sont trois points en ligne droite (Van Aubel);

2° Le point de Lemoine K, *le centre* O' *du cercle des neuf points d'un triangle* ABC, *et le centre* Z' *du cercle de Brocard du triangle* A'B'C' *formé en menant par les sommets de* ABC *des parallèles aux côtés opposés sont trois points en ligne droite et on a :* KO' = O'Z.

3° Le centre O *du cercle circonscrit à* ABC, *le point de Lemoine* K_1 *du triangle* $A_1B_1C_1$ *obtenu en joignant les milieux des côtés de* ABC *et le centre* Z' *du triangle* A'B'C' *sont trois points en ligne droite et l'on a :* $OK_1 = K_1Z'$. (E. Vigarié.)

1° Soient a', b', c' les côtés du triangle orthocentrique, on a :

$$\frac{a'}{\sin 2A} = \frac{b'}{\sin 2B} = \frac{c'}{\sin 2C}.$$

Prenons le triangle orthocentrique pour triangle de référence et cherchons les coordonnées barycentrique de K on a :

$$\alpha' = \sin 2A(\sin^2 B \operatorname{cotg} B + \sin^2 C \operatorname{cotg} C - \sin^2 A \operatorname{cotg} A),$$

$$\alpha' = \sin 2A(\sin 2B \sin 2C - \sin 2A) = a'(p' - a').$$

Comme le centre du cercle inscrit au triangle orthocentrique, n'est autre que l'orthocentre de ABC, il s'ensuit que K est en ligne droite avec l'orthocentre et le point de Lemoine du triangle orthocentrique.

2° Soit G le centre de gravité de ABC; O' est le complémentaire de O, et Z' est l'anticomplémentaire de Z centre du cercle de Brocard de ABC; donc $OG = 2GO'$ et $GZ' = 2GZ$. Les triangles O'GZ, ZGO sont semblables et $OZ' = 2ZO'$. Si on prolonge O'Z' jusqu'à son point de rencontre K avec ZO, la similitude des triangles KO'Z, KZ'O montre que $KZ = ZO$; donc K est le point de Lemoine de ABC; en outre $KO' = O'Z'$.

3° Le point K_1 étant le complémentaire de K, ce point s'obtient en joignant KG et en prolongeant la droite d'une longueur égale à sa moitié; on a ainsi le milieu de OZ'. Donc $OK_1 = K_1Z'$.

QUESTION 302

Solution par M. B.-J. Sollertinsky, à Gatschina.

Résoudre les équations

$$\frac{x-b-c}{x-2a} + \frac{x-c-a}{x-2b} + \frac{x-a-b}{x-2c} + 1 = 0,$$

$$\frac{2x+c-b}{x+b-c} + \frac{2x+a-c}{x+c-a} + \frac{2x+b-a}{x+a-b} + 2 = 0,$$

$$\frac{x+b+c-a}{x+3a-b-c} + \frac{x+c+a-b}{x+3b-c-a} + \frac{x+a+b-c}{x+3c-a-b} + 1 = 0,$$

. . . .

et reconnaître que la clef qui peut servir à former, en nombre indéfini, les équations de ce genre, est représentée par l'identité

$$(1)\ (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)-\alpha\beta(\alpha+\beta)-\beta\gamma(\beta+\gamma)-\alpha\gamma(\alpha+\gamma)-2\alpha\beta\gamma\equiv 0.$$

Remarque. — *Avec cette clef on peut aussi obtenir, en nombre indéfini, des équations du second degré donnant des racines com-*

mensurables; par exemple

$$\frac{x+a}{b}+\frac{x+b}{a}+\frac{a+b}{x}+2=0.$$

(G. L.)

L'identité (1) peut être mise sous la forme

$$(2)\quad \frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+2=\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}.$$

En posant
$$\beta+\gamma=2x-2m,$$
$$\gamma+\alpha=2x-2n,$$
$$\alpha+\beta=2x-2p;$$
on a
$$\alpha=x+m-n-p,$$
$$\beta=x-m+n-p,$$
$$\gamma=x-m-n+p;$$
et l'identité (2) donne

$$\frac{x-m}{x+m-n-p}+\frac{x-n}{x-m+n-p}+\frac{x-p}{x-m-n+p}+1$$
$$=\frac{4(x-m)(x-n)(x-p)}{(x+m-n-p)(x-m+n-p)(x-m-n+p)};$$

d'où il suit que les quantités m, n, p satisfont à l'équation

$$(3)\quad \frac{x-m}{x+m-n-p}+\frac{x-n}{x-m+n-p}+\frac{x-p}{x-m-n+p}+1=0.$$

Mais, évidemment, toute équation de la forme

$$\frac{x+a_1}{x+b_1}+\frac{x+a_2}{x+b_2}+\frac{x+a_3}{x+b_3}+1=0,$$

est identique à l'équation (3), si l'on a

$$2a_1=b_2+b_3;\quad 2a_2=b_1+b_3;\quad 2a_3=b_1+b_2.$$

Les racines des équations données sont donc :

1° $\quad b+c,\quad c+a,\quad a+b;$

2° $\quad \frac{1}{2}(b-c),\quad \frac{1}{2}(c-a),\quad \frac{1}{2}(a-b);$

3° $\quad a-b-c,\quad b-a-c,\quad c-a-b.$

Remarque. — Pour obtenir une équation du second degré, on peut poser (dans la première partie de l'identité (2),

$$\alpha=x;\quad \beta=-m;\quad \gamma=-n;$$

m, n sont alors les racines de l'équation corespondante.

Nota. — Autre solution par M. Boutin.

QUESTIONS PROPOSÉES

354. — On donne a et α_1; puis, on calcule $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$, par voie récurrente, au moyen de la formule

$$a(n-1)\alpha_n = \alpha_1\alpha_{n-1} + \alpha_2\alpha_{n-2} + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_1.$$

Démontrer que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ forment une progression géométrique. *(G. L.)*

355. — On donne deux droites rectangulaires Δ, Δ' se coupant en O, et un point fixe P. Par ce point P, on trace une droite mobile coupant Δ, Δ', aux points A, A'. Soit Γ la circonférence circonscrite au triangle OAA'. La droite qui joint le milieu de OA au point qui, sur Γ, est diamétralement opposé au point O, coupe Γ en I. Trouver le lieu géométrique de ce point I.

Ce lieu est une circonférence. *(G. L.)*

Nous avons le regret d'annoncer à nos lecteurs que M. Lévy cesse de faire partie de la direction du Journal auquel il continuera d'apporter le concours de sa collaboration.

Le Directeur-gérant,

G. de Longchamps.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4356-3-90.

PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Par M. **Louis Bénezech.**

1. — Soit ABC un triangle; menons les bissectrices intérieures et extérieures de ses angles. On sait que les bissectrices intérieures sont les hauteurs du triangle $I_aI_bI_c$ déterminé par les bissectrices extérieures. D'ailleurs, le cercle O, circonscrit à ABC, passant par les pieds des hauteurs du triangle $I_aI_bI_c$ est le cercle des neuf points, relatif à ce dernier triangle. Il passe donc aussi par les milieux A″, B″, C″ des côtés et par les points A′, B′, C′ des segments II_a, II_b, II_c. Les droites A′A″, B′B″, C′C″ sont les *médiatrices* des côtés BC, CA, AB. Soient M_a, M_b, M_c les milieux de ces côtés. Des points I, I_a, I_b, I_c, abaissons sur BC les perpendiculaires II′, II'_a, II'_b, II'_c dont les longueurs sont précisément les rayons γ, γ_a, γ_b, γ_c du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits au triangle ABC. Les droites II′, M_aA', I_aI_a étant parallèles et A′ étant le milieu de II_a, on a

(1) $$M_aA' = \frac{\gamma_a - \gamma}{2}.$$

De même, $I_bI'_b$, $A''M_a$, $I_cI'_c$ étant parallèles et A″ étant le milieu de I_bI_c, on a :

(2) $$M_aA'' = \frac{\gamma_b + \gamma_c}{2}.$$

On peut observer en passant, que, en combinant les égalités précédentes avec les relations évidentes :

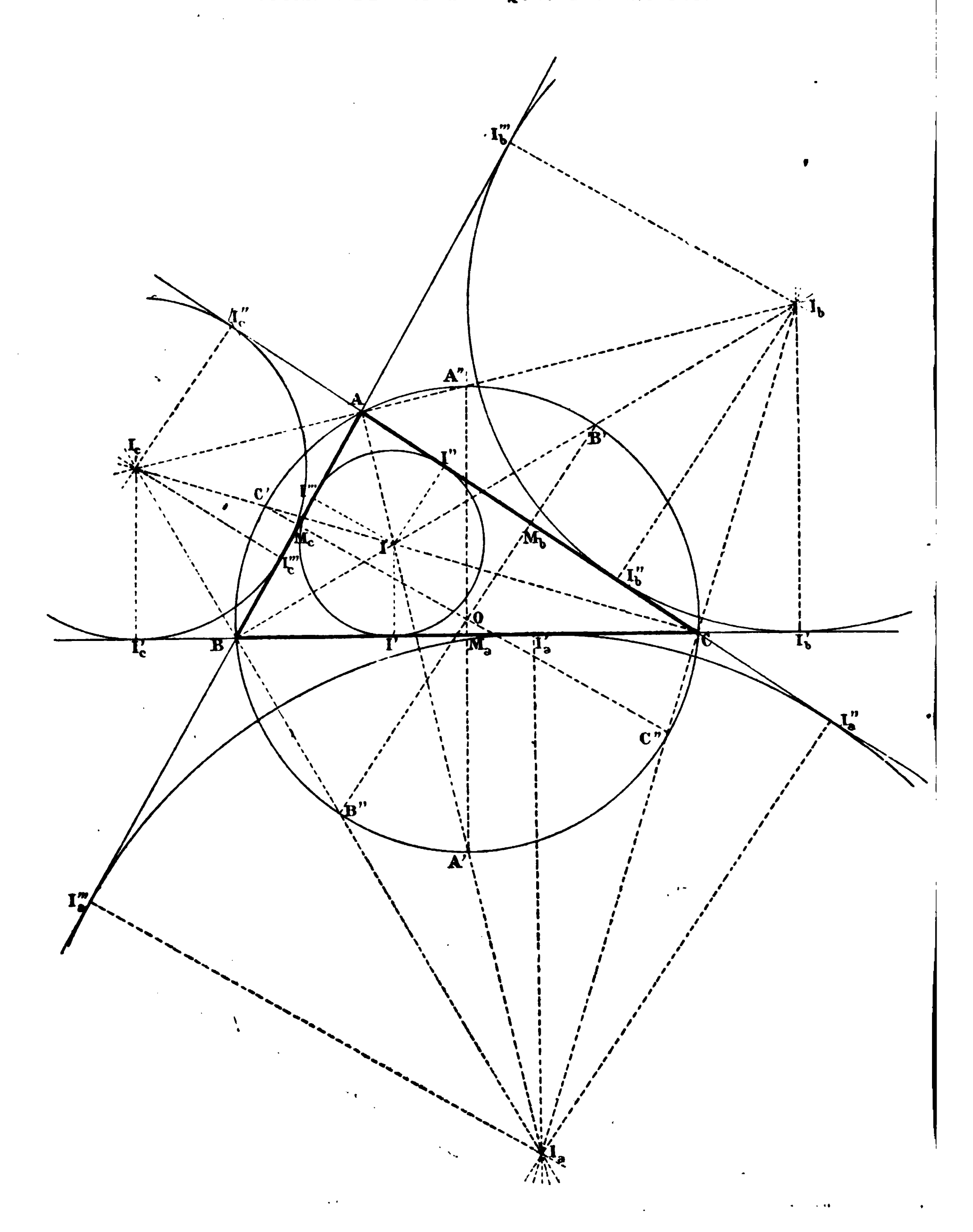
$$M_aA' + M_aA'' = 2R, M_aA'.H_aA'' = \frac{a^2}{4}, OM_a = \pm \frac{M_aA'' - H_aA'}{2}$$

on déduit immédiatement trois théorèmes connus, correspondant aux égalités

$$\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c = 4R + \gamma, (\gamma_a - \gamma)(\gamma_b + \gamma_c) = a^2,$$

$$OM_a = \pm \frac{\gamma_b + \gamma_c - \gamma_a + \gamma}{4}.$$

Il est évident, d'après la figure, que si l'on a l'une quelconque des relations



I'''b
I''c
Ib
A''
A
B'
Ic
I''
C'
I'''
Mc
I
Mb
I'''c
I''b
Q
B
I'c
I'
Ma
I'a
C
I'b
I''a
C''
B''
A'
I'''a
Ia

$M_aA' = M_aA''$, $M_aA'' = R$, $M_aA' = \frac{a}{2}$, $M_aA' = R$, $M_aA' = \frac{a}{2}$
le triangle est rectangle en A, et, réciproquement. D'après cela, et en tenant compte des relations (1), (2), on a la propriété suivante :

Théorème I (*). — *Dans tout triangle* ABC, *rectangle en* A,
$\gamma_a = \gamma + \gamma_b + \gamma_c$, $\gamma_b + \gamma_c = R$, $\gamma_b + \gamma_c = a$, $\gamma_a - \gamma = 2R$, $\gamma_a - \gamma = a$;
et réciproquement, chacune de ces relations caractérise un triangle rectangle.

2. — Évaluons maintenant les distances telles que I_bI_c.

1° Comme on a $I'_bI'_c = b + c$, le trapèze birectangle $I_bI'_bI'_cI_c$ donne $\overline{I_bI_c}^2 = (b + c)^2 + (\gamma_b - \gamma_c)^2$.

2° Le point A″ étant le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle I_bI_cC, on a $I_bI_c = 2CA''$. Or
$$\overline{CA''}^2 = \overline{A'M_a}^2 + \overline{M_aC}^2,$$
donc $$4\overline{CA''}^2 = \overline{I_bI_c}^2 = R(\gamma_b + \gamma_c)^2 + a^2.$$

3° Le triangle rectangle A″A′C donne
$$\overline{A''C}^2 = A''A' \ A'M_a$$
d'où $$\overline{I_bI_c}^2 = 4R(\gamma_b + \gamma_c).$$

On trouve ainsi trois expressions de $\overline{I_bI_c}^2$:
$$\overline{I_bI_c}^2 = (b + c)^2 + (\gamma_b - \gamma_c)^2 = (\gamma_b + \gamma_c)^2 + a^2 = 4R(\gamma_b + \gamma_c)$$

Par des considérations analogues, on trouverait les trois expressions de $\overline{II_a}^2$:
$$\overline{II_a}^2 = (b - c)^2 + (\gamma + \gamma_a)^2 = (\gamma_a - \gamma)^2 + a^2 = 3R(\gamma_a - \gamma).$$

En prenant $\overline{I_aI_b}^2$, $\overline{II_a}^2$ et les quantités de même nature, sous la troisième forme, il vient :
$$\overline{I_aI_b}^2 + \overline{I_bI_c}^2 + \overline{I_cI_a}^2 = 8R(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c) = 8R(4R + \gamma),$$
$$\overline{II_a}^2 + \overline{II_b}^2 + \overline{II_c}^2 = 4R(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c - 3\gamma) = 8R(2R - \gamma),$$
et $$\overline{II_a}^2 + \overline{II_b}^2 + \overline{II_c}^2 + \overline{I_aI_b}^2 + \overline{I_bI_c}^2 + \overline{I_cI_a}^2 = 48R^2.$$

D'où :

Théorème II. — *Dans tout triangle* ABC :

1° La somme des carrés des côtés du triangle déterminé par les

(*) Voir *Propriétés du triangle rectangle*, J. E. 1889, p. 193.

centres des cercles inscrit et ex inscrits est égale au produit de la somme du rayon du cercle inscrit et de quatre fois le rayon du cercle circonscrit par huit fois le rayon du cercle circonscrit.

2° La somme des carrés des distances du centre du cercle inscrit aux centres des cercles ex-inscrits est égale au produit de la différence du diamètre du cercle circonscrit et du rayon du cercle inscrit par huit fois le rayon du cercle circonscrit.

3° La somme des carrés des distances des centres des cercles inscrits et ex-inscrits pris deux à deux est égale à quarante-huit fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

Des relations $\overline{II_a}^2 = 4R(\gamma_a - \gamma)$, $\overline{I_bI_c}^2 = 4R(\gamma_b + \gamma_c)$ et du théorème I, on déduit encore :

Théorème III. — *Dans tout triangle* ABC, *rectangle en* A, *on a*

$$II_a = I_bI_c;$$

et réciproquement.

3. — Le triangle rectangle A″A′C donne :

$$\overline{CA'}^2 + \overline{CA''}^2 = \overline{A'A''}^2, \quad CA'.CA'' = A'A''.M_aC,$$

$$\frac{1}{\overline{CA'}^2} + \frac{1}{\overline{CA''}^2} = \frac{1}{\overline{CM_a}^2}.$$

En remplaçant CA′, CA″, CM_a, A′A″, respectivement, par

$$\frac{II_a}{2}, \quad \frac{I_bI_c}{2}, \quad \frac{a}{2}, \quad 2R,$$

ces relations deviennent :

$$\overline{II_a}^2 + \overline{I_bI_c}^2 = 16R^2, \quad II_a . I_bI_c = 4Ra, \quad \frac{1}{\overline{II_a}^2} + \frac{1}{\overline{I_bI_c}^2} = \frac{1}{a^2},$$

donc :

Théorème IV. — *La somme des carrés des distances du centre du cercle inscrit à l'un des centres des cercles ex-inscrits et des deux autres centres des cercles ex-inscrits est constante et égale à* $16R^2$.

Remarque. — La troisième partie du théorème II se déduit immédiatement du théorème précédent.

On énoncerait de même les théorèmes correspondant aux deux autres relations. On déduit encore de ces formules :

Théorème V. — *Dans tout triangle* ABC, *rectangle en* A, *on a*

$$\overline{II_a}^2 + \overline{I_bI_c}^2 = 4a^2,\ II_a . I_bI_c = 8R^2,$$

$$II_a . I_bI_c = 2a^2,\ \frac{1}{\overline{II_a}^2} + \frac{1}{\overline{I_bI_c}^2} = \frac{1}{4R^2},$$

et RÉCIPROQUEMENT, *si l'une quelconque de ces relations est vérifiée, le triangle est rectangle en* A.

4. — Dans le triangle OII_a,

$$\overline{OI}^2 + \overline{OI_a}^2 = 2\overline{OA'}^2 + 2\overline{A'I} = 2R^2 + 2\overline{A'C}^2.$$

Dans le triangle OI_bI_c,

$$\overline{OI_b}^2 + \overline{OI_c}^2 = 2\overline{OA''}^2 + 2\overline{A''I}^2 = 2R^2 + 2\overline{A''C}^2.$$

Donc, en observant que $\overline{A'C}^2 + \overline{A''C}^2 = 4R^2$, $II_a = 2AC'$, $I_bI_c = 2A''C$; et, en tenant compte de ce fait que les relations, $A'C = A''C$, $A'C = R\sqrt{2}$, $A''C = R\sqrt{2}$ sont caractéristiques d'un triangle rectangle en A, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Théorème VI. — *Dans tout triangle, la somme des carres des distances du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles inscrit et ex-inscrits est égale à douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit* (*).

Théorème VII (**). — *Dans tout triangle* ABC, *rectangle en* A,

$$\overline{OI}^2 + \overline{OI_a}^2 = \overline{OI_b}^2 + \overline{OI_c}^2,\ \overline{OI}^2 + \overline{OI_a}^2 = 6R^2,\ \overline{OI_b}^2 + \overline{OI_c}^2 = 6R^2,\ II_a = I_bI,\ II_a = 2R\sqrt{2},\ I_bI_c = 2R\sqrt{2},$$

et réciproquement, si l'une quelconque de ces relations est vérifiée, le triangle est rectangle en A. *(A suivre.)*

(*) Cette propriété est très connue (voyez: Catalan *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e édition, p. 146). Cette remarque s'applique à quelques autres propositions de la présente note dont la matière est trop élémentaire pour qu'il en puisse être autrement. Pourtant, certains théorèmes, établis dans le travail de M. Bénezech, nous ont paru nouveaux et intéressants. G. L.

(**) Voir « Propriétés du triangle rectangle » *J. E.* 1889, p. 193.

ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Auguste Morel.**

(*Suite*, voir p. 55.)

23. Théorème. — *Le lieu géométrique des milieux des cordes, de direction donnée, est une droite qui rencontre la directrice au même point que la perpendiculaire menée du foyer sur la direction donnée.*

Considérons une droite de direction constante, rencontrant la courbe en P Q, et la directrice en R. Soit FH la perpendiculaire menée du foyer sur cette droite; elle rencontre la directrice en V. Il résulte, du théorème précédent, que

$$\frac{FP}{PR} = \frac{FQ}{QR}.$$

On a donc

$$\frac{FP^2}{PR^2} = \frac{FQ^2}{QR^2};$$

d'où

$$(1)\quad \frac{FP^2 - FQ^2}{PR^2 - QR^2} = \frac{FP^2}{PR^2} = k^2\lambda^2.$$

Fig. 7.

Soit M le milieu de PQ. Le triangle FPQ donne

$$(2)\quad FP^2 - PQ^2 = 2MH \times PQ.$$

D'ailleurs,

$$PR + QR = 2MR;$$
$$PR - QR = PQ,$$

et, par suite,

$$(3)\qquad PR^2 - QR^2 = 2MR \times PQ.$$

Les relations (1), (2), (3) donnent donc

$$\frac{MH}{MR} = k^2\lambda^2.$$

Ainsi, le lieu du point M est une droite passant par le point

V. Cette droite s'appelle le *diamètre* correspondant à la direction PR.

24. — Cherchons maintenant les particularités que présentent les diamètres, suivant les diverses espèces de courbes.

Par le point M, traçons MZ parallèle à FX, et rencontrant la directrice en Z; puis menons ZT perpendiculaire à MR, qu'elle rencontre au point T. On a d'abord

$$\frac{\overline{MZ}^2}{\overline{MR}^2} = k^2.$$

Le triangle rectangle MZR donne ensuite

$$\overline{MZ}^2 = MR \times MT.$$

On a donc
$$\frac{MH}{MR} = k^2 \cdot \frac{MT}{MR};$$

et, finalement,
$$MH = k^2 \cdot MT.$$

Supposons d'abord $k^2 = 1$; c'est le cas de la parabole. Alors $MH = MT$. Or H est le pied de la perpendiculaire abaissée du point V sur PR; donc le point V est confondu avec le point Z; par suite, la droite VM, qui est le diamètre correspondant à la direction PR, est parallèle à l'axe. Comme la direction PR est quelconque, on voit que :

Dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles à l'axe.

Prenons maintenant le cas où l'excentricité est différente de l'unité. Alors, le point T n'est plus confondu avec le point H, et le point Z diffère du point V. Donc le diamètre VM n'est pas parallèle à l'axe; il le rencontre en un point O. De plus, la ligne VH rencontre MZ en un point N, tel que

$$\frac{MH}{MT} = \frac{MN}{MZ}.$$

On a donc
$$\frac{OF}{OX} = \frac{MN}{MZ} = \frac{MH}{MT} = k^2;$$

d'où, en supposant $k < 1$,

$$\frac{OX - OF}{OX} = 1 - k^2,$$

ou
$$\frac{FX}{OX} = 1 - k^2.$$

D'autre part, A et A' étant les sommets, on a

$$FX = AX(1 + k),$$
$$FX = A'X(1 - k).$$

Des égalités précédentes, on déduit

$$OX(1 - k) = AX,$$
$$OX(1 + k) = A'X;$$

et, par conséquent, $2OX = AX + A'X.$

Ainsi, *tout diamètre de l'ellipse rencontre l'axe au milieu de la distance des deux sommets.*

Dans le cas de l'hyperbole, en observant que le point O est situé à gauche de la directrice, on trouve, par un calcul analogue au précédent, que le point O est au milieu de AA'. Donc :

Dans les coniques dont l'excentricité est différente de l'unité, les diamètres passent tous par un point fixe, qui est le milieu de l'*axe* de la courbe. Ce point s'appelle le *centre* de la courbe. Aussi dit-on, dans ce cas, que ces courbes sont des *coniques à centre.*

On doit observer que, au nombre des droites parallèles à la direction donnée, il en est une qui passe par le point O. La corde déterminée par la courbe sur cette droite a donc son milieu en ce point, puisqu'il est sur le diamètre. Donc le centre est le milieu de toutes les cordes qui passent par ce point.

25. — Cela posé, cherchons le diamètre des cordes parallèles à VO. Pour cela, d'après la construction précédente, menons FV' perpendiculaire à VO, et rencontrant la directrice en V', puis traçons V'O. C'est le diamètre cherché.

Or, dans le triangle VOV', la droite OX est perpendiculaire sur VV'; la droite FV' est perpendiculaire sur VO; donc VF est perpendiculaire sur le troisième côté V'O, lequel est, par suite, parallèle à PR.

Les deux diamètres VO, V'O, tels que l'un d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, s'appellent des *diamètres conjugués.*

26. Corollaire. — Si, par le point I, où le diamètre VO rencontre la conique M, nous menons une droite parallèle à PR, le milieu du segment compris dans l'intérieur de la conique se confond avec le point I ; ce qui exige que ce segment lui-

même se réduise à un point. Donc la droite, ainsi menée, est tangente à la conique. Par conséquent :

Les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles aux cordes que ce diamètre partage en deux parties égales.

27. Théorème. — *Si l'on considère, dans une conique, deux cordes parallèles, les droites qui joignent les extrémités de ces cordes se coupent sur le diamètre correspondant.*

Soient AB et CD les deux cordes ; E, H leurs milieux. Les parallèles AB, CD sont partagées, aux points E, H, en parties proportionnelles ; par suite, les droites AC, BD, EH sont concourantes. Or EH est le diamètre correspondant aux cordes données.

28. Corollaire. — Si les cordes AB et CD se confondent, AC devient tangente, ainsi que BC. Par conséquent :

Si, par les extrémités d'une corde, on mène des tangentes à la conique, ces tangentes se coupent sur le diamètre conjugué de la direction de la corde.

29. Théorème. — *Les coniques à centre possèdent un second axe de symétrie, perpendiculaire à l'axe qui passe par le foyer.*

En effet, considérons une direction de cordes parallèles à l'axe FX. Il en résulte que la perpendiculaire FH, menée par le foyer, à cette direction de cordes, est parallèle à la directrice ; de plus, la quantité précédemment désignée par λ est ici égale à l'unité. Ainsi, en appelant M le milieu d'une corde, H le pied de la perpendiculaire menée de F sur cette corde, et R le point où la corde rencontre la directrice, on a

$$\frac{MH}{MR} = k^2.$$

Or, on a vu que

$$k^2 = \frac{OF}{OX}.$$

De ces deux égalités, on déduit

$$\frac{MH}{MR} = \frac{OF}{OX},$$

ou

$$\frac{MH}{HR} = \frac{OF}{OX}.$$

Comme HR = FX, on a MH = LF; par suite, le lieu du milieu des cordes parallèles à FX est une droite perpendiculaire à FX, et passant par le centre. Ainsi, les points de la courbe sont deux à deux symétriques par rapport à la droite LO; celle-ci est donc un second axe de symétrie.

30. Corollaire. — L'existence de ce second axe de symétrie montre que, si l'on prend un point P de la courbe, il y a, sur celle-ci, un point P′ symétrique de P par rapport à FX, et un point P″, symétrique de P par rapport à OM. Donc FX et ML, respectivement perpendiculaires aux milieux des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, se coupent au milieu de l'hypoténuse. Par suite, P′P″ passe au point O, qui partage cette ligne en deux parties égales. Il en résulte que le point O partage en deux parties égales toute corde de la conique, passant ce point. C'est cette propriété que nous avons déjà constatée pour le point nommé *centre* de la courbe.

31. Théorème. — *Dans une conique à centre, il y a un second foyer, symétrique du point F par rapport au centre, et une seconde directrice, également symétrique de la première par rapport au centre.*

En effet, soient F′, symétrique de F par rapport au centre O, et $D'D'_1$, symétrique de DD_1, par rapport au centre. Les deux droites DD_1 et $D'D'_1$ sont parallèles au second axe de symétrie, et équidistantes de cet axe.

Soit une corde parallèle à FX, rencontrant la courbe aux points P et P″, les deux droites DD_1 et $D'D'_1$ en R et R′, et le second axe au point M. On a d'abord MP = MP″, puis MR = MR′; par suite

$$PR = P''R' \quad \text{et} \quad PR' = P''R.$$

D'autre part, si l'on trace FP et F′P″, ces droites sont égales, comme étant deux droites limitées, symétriques par rapport à M. Pour la même raison on a FP″ = F′P.

Il en résulte que

$$\frac{FP}{PR} = \frac{F'P''}{P''R'}, \qquad \frac{FP''}{P''R} = \frac{F'P}{PR'}.$$

Mais le rapport $\frac{FP}{PR}$ est égal à l'excentricité k; il en est donc

de même de $\frac{F'P'}{P'R'}$. Ainsi, le point P, et par suite son symétrique P′ étant un point quelconque de la courbe, il en résulte que la courbe est encore le lieu des points tels que le rapport de leurs distances au foyer F′ et à la droite $D'D'_1$ ait une valeur constante, égale à la précédente. *(A suivre.)*

LE 176me PORISME D'EUCLIDE

ET SES CONSÉQUENCES

Par M. **E. Vigarié.**

Nous avons déja signalé, d'après M. G. Tarry, l'importance de la 176me proposition d'Euclide. Pour répondre au désir exprimé par M. de Longchamps dans ce Journal, (1890, p. 35), nous allons montrer comment, de la connaissance du porisme, on déduit immédiatement les propriétés les plus élémentaires du cercle, des points et de l'angle de Brocard.

Afin de mieux faire ressortir les analogies que nous avons en vue, nous rappellerons quelques notations. Dans un triangle ABC, nous désignerons par O le centre du cercle circonscrit Δ; par Ω, Ω′ les points de Brocard; par Ω_a, Ω'_a; Ω_b, Ω'_b; Ω_c, Ω'_c; leurs projections sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC; par S le milieu de la droite ΩΩ′; enfin par P′, Q′ les points où les tangentes aux extrémités P, Q,

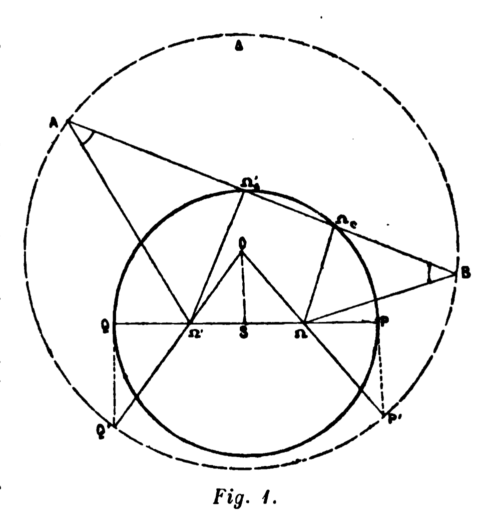


Fig. 1.

du grand axe de l'ellipse de Brocard coupent le cercle circonscrit.

Nous énoncerons, d'abord, le lemme suivant :

Lemme. — *Si, autour d'un point Ω pris dans le plan d'un cercle, on fait tourner un côté d'un angle droit dont le sommet Ω_c glisse sur la circonférence du cercle, et que par le point Ω'_c où l'autre côté rencontre la circonférence, on mène une parallèle au premier côté : cette droite passera par un point fixe Ω'.*

Cette proposition, qui forme le 175[me] porisme d'Euclide, est évidente. Elle est généralisée par le porisme qui suit :

Porisme. — *Un angle de grandeur donnée ω se meut de manière qu'un de ses côtés passe par un point donné Ω et que son sommet B glisse sur une circonférence de cercle; son second côté rencontre la circonférence en un second point A, par lequel on mène une droite faisant avec ce côté un angle égal à l'angle mobile ω, mais en sens contraire : cette droite passe par un point fixe Ω'.*

La démonstration de cette proposition (*) se déduit du lemme précédent, qui n'en est qu'un cas particulier, celui où l'angle mobile est droit.

Reprenons, en effet, la figure qui résulte de l'énoncé du lemme, et concevons qu'on ait abaissé du point Ω, sur $\Omega_c\Omega'_c$, une oblique ΩB faisant avec $\Omega_c\Omega'_c$ l'angle $B = \omega$ de la grandeur donnée; le point B sera sur un cercle, car le triangle rectangle $\Omega\Omega_c$B est donné d'espèce : par conséquent, son hypoténuse ΩB est proportionnelle au côté $\Omega\Omega_c$. Si l'on portait, sur $\Omega\Omega_c$, une ligne égale à ΩB, son extrémité serait sur un cercle ayant le point Ω pour centre de similitude avec le cercle PΩ_cQ. Si l'on supposeq ue ce cercle tourne autour du point Ω, d'un angle égal à $\Omega_c\Omega$B, il deviendra le lieu du point B. Ce point est donc sur le cercle Δ. Le point P', où la droite ΩP' faisant, avec ΩP, l'angle PΩP' égal à $\Omega_c\Omega$B, rencontre la tangente en P, appartient au cercle Δ dont le centre est en O, au point de rencontre

(*) Nous reproduisons ici la démonstration donnée par Chasles, dans *Les trois livres de porismes d'Euclide*, pages 279-281 ; nous avons seulement modifié les lettres employées, afin de faire concorder les résultats avec les notations précédemment indiquées.

de $\Omega P'$ avec la perpendiculaire à $\Omega\Omega'$, élevée par le centre S du premier cercle.

Maintenant, si l'on suppose que, du point Ω', on abaisse, sur la droite $\Omega_c\Omega'_c$, une oblique $\Omega' A$ faisant en A l'angle égal à l'angle donné ω, mais de sens contraire, de manière que le premier étant à droite de la perpendiculaire $\Omega\Omega_c$, le second soit à gauche de la perpendiculaire $\Omega'\Omega'_c$; le point A sera sur un cercle qui sera le même que le cercle Δ; car son centre sera sur la droite $\Omega' Q'$ faisant, avec $\Omega' Q$, l'angle $Q\Omega' Q'$ égal à $\Omega'_c\Omega_c A$, et, par conséquent, coïncidera avec le centre O de Δ: en outre, son rayon OQ' sera égal à OP'.

On conclut de là que : si par un point Ω, donné dans le plan d'un cercle Δ, on mène une droite ΩB à un point de la circonférence, et, par ce point, une droite AB faisant avec ΩB un angle donné ω; puis par ce point A une autre droite faisant avec AB un angle égal à ω, mais dans un sens différent : cette droite passera par un point fixe Ω', situé sur la droite ΩP qui fait, avec le rayon $O\Omega$ du cercle Δ, un angle $P\Omega P'$ égal au complément de l'angle donné ω.

L'application de ce porisme au cas du triangle, nous donne les propriétés suivantes :

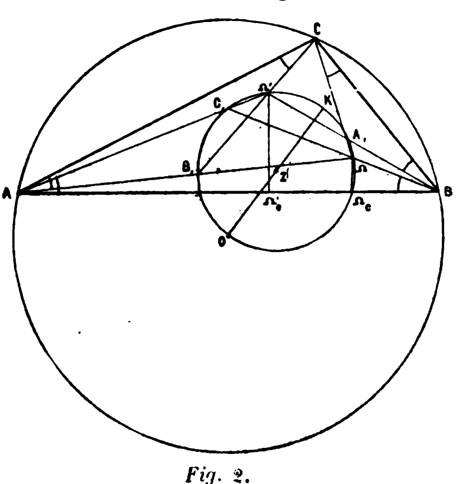


Fig. 2.

Soit un triangle ABC quelconque, et soit O le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Construisons le point Ω tel que les angles ΩAB, ΩBC, ΩCA soient égaux, et appelons ω la grandeur de cet angle. Il existe, en vertu du porisme, un second point Ω' tel que que les angles $\Omega' BA$, $\Omega' CB$, $\Omega' AC$ sont tous trois égaux à ω.

Ω et Ω' sont les points de Brocard, ω est l'angle de Brocard.

D'après le porisme, les droites $O\Omega$, $O\Omega'$ sont égales. De plus dans le triangle $\Omega O \Omega'$, qui est isocèle, l'angle au sommet O est égal à 2ω.

Les droites $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$ rencontrent $B\Omega'$, $C\Omega'$, $A\Omega'$ aux points C_1, A_1, B_1. Les points A_1, B_1, C_1 appartiennent au cercle $\Omega O \Omega'$.

En effet, l'angle $\Omega A_1 \Omega'$ égal à l'angle BA_1C ou à son supplément, est égal à 2ω ou à son supplément; il est par conséquent égal à l'angle $\Omega O \Omega'$ ou à son supplément.

$A_1B_1C_1$ *est le premier triangle de Brocard et le cercle* $A_1B_1C_1O\Omega\Omega$ *est le cercle de Brocard.* Le point O étant sur la perpendiculaire au milieu de $\Omega\Omega'$, *le centre* Z *du cercle de Brocard est sur la droite qui joint le centre* O *du cercle circonscrit au milieu* S *de la droite qui joint les points de Brocard.*

Les parallèles aux côtés du triangle ABC menées par $A_1B_1C_1$ coupent le cercle $\Omega O \Omega'$ en un point K, diamétralement opposé à O.

Donc K *(point de Lemoine) est un septième point du cercle de Brocard.*

Il résulte encore de la démonstration du porisme que :

Les projections Ω_a, Ω'_a, Ω_b, Ω'_b, Ω_c, Ω'_c *sur les côtés du triangle* ABC *sont six points d'une même circonférence.* Cette circonférence est, on le sait, le cercle principal de l'ellipse de Brocard et le plus petit cercle de Tucker du triangle donné.

On voit encore que :

Les droites qui joignent le centre O *du cercle circonscrit du triangle* ABC *aux points de Brocard* Ω, Ω' *coupent le cercle circonscrit en deux points* P', Q'. *Les perpendiculaires abaissées de* P' *et* Q' *sur* Ω, Ω' *sont les tangentes communes à l'ellipse de Brocard et à son cercle principal.*

En continuant ainsi, on pourrait arriver, comme il est facile de le voir, à énoncer les propriétés les plus saillantes des éléments de Brocard; le 176me porisme d'Euclide pourrait donc servir de point de départ dans l'étude de la géométrie du triangle.

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin.**

(*Suite*, voir page 65.)

142. — Par un point quelconque M de la circonférence circonscrite à un triangle ABC, on mène la droite MA_cA_b parallèle à BC, et rencontrant, en A_c, A_b, les côtés de l'angle A, les droites C_aC_b, B_aB_c respectivement parallèles à AB, AC. Démontrer que l'on a, quel que soit le point M,

$$MA_c.MA_b + MB_a.MB_c + MC_a.MC_b = 0.$$

Si les droites A_cA_b, B_aB_c, C_aC_b, au lieu d'être parallèles aux côtés de ABC, sont des antiparallèles de ces côtés par rapport aux angles opposés, le théorème subsiste.

1° On a, x, y, z étant les coordonnées normales de M,

$$MA_c = \frac{y}{\sin C}, \qquad MA_b = \frac{z}{\sin B},$$

$$\sum MA_c.MA_b = \sum \frac{yz}{\sin B \sin C} = 0.$$

La dernière relation revient à $\sum \frac{a}{x} = 0$, qui est l'équation du cercle circonscrit.

2° $$MA_c = \frac{y}{\sin B}, \qquad MA_b = \frac{z}{\sin C}.$$

De là on tire la même relation dans laquelle il y a évidemment lieu de tenir compte des signes des segments.

143. — α, β, γ, α', β', γ' étant les bissectrices intérieures ou extérieures d'un triangle, on a l'identité :

$$\frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha'^2 + \alpha^2}\sin A + \frac{\beta'^2 - \beta^2}{\beta'^2 + \beta^2}\sin B + \frac{\gamma'^2 - \gamma^2}{\gamma'^2 + \gamma^2}\sin C = \frac{2T}{R^2}.$$

144. — Soient deux entiers N et N', tels que le chiffre des dizaines soit le même b pour chacun d'eux, et que le chiffre des unités de l'un soit le complément à 10 du chiffre des unités de l'autre. Le chiffre des dizaines du nombre $N^2 + N'^2$ est constant, quel que soit b.

Il suffit de poser

$$N = 100\alpha + 10b + a,$$
$$N' = 100\beta + 10b + (10 - a),$$

d'élever au carré et d'ajouter.

On constate que le chiffre constant des dizaines de $N^2 + N'^2$ est 8, si N et N′ sont terminés par 1 et 9 ; 6, lorsque N et N′ sont terminés par 2 et 8 ; 4, dans tous les autres cas.

145. — Vérifier les identités :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \equiv (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + (2ab - 2cd)^2 + (2ad + 2bc)^2,$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3 \equiv a^2(a^2 - 3b^2 + c^2 - 3d^2)^2 + c^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + (3a^2b - b^3 - bc^2 - bd^2 - 4acd)^2 + (3a^2d - b^2d - c^2d - d^3 + 4abc)^2,$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \equiv (a^2 - b^2 + c^2)^2 + (2ab)^2 + (2bc)^2.$$

146. — Si un entier est une somme de trois carrés, toutes ses puissances sont des sommes de trois carrés (*).

1° La puissance est de rang impair. On a :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^{2k+1} \equiv [a(a^2 + b^2 + c^2)^k]^2 + [b(a^2 + b^2 + c^2)^k]^2 + [c(a^2 + b^2 + c^2)^k]^2.$$

2° La puissance est de rang pair $= 2^\alpha(2k + 1)$.

Alors : $(a^2 + b^2 + c^2)^{2^\alpha.(2k+1)} \equiv \left[(a^2 + b^2 + c^2)^{2^\alpha}\right]^{2k+1}$.

D'après une identité de l'exercice précédent :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \equiv a_1^2 + b_1^2 + c_1^2.$$

En l'appliquant α fois de suite, on aura :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^{2\alpha} = A^2 + B^2 + C^2, \text{ etc.}$$

147. — Vérifier les identités

1° $$\sum \frac{1}{(a-c)(a-b)(x+a)^2} = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} \sum \frac{1}{x+a},$$

2° $$\sum \frac{1}{(a-c)(a-b)(x+a)^3} = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} \left[\sum \frac{1}{(x+a)^2} + \sum \frac{1}{(x+a)(x+b)}\right]$$

3° $$\sum \frac{1}{(a-c)(a-b)(x+a)^4} = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} \left[\sum \frac{1}{(x+a)^3} + \sum \frac{1}{(x+a)^2(x+b)} + \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\right],$$

(*) Théorème de Catalan : *Toute puissance, entière et positive, d'une somme de trois carrés, est une somme de trois carrés.* Voyez : *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 9 (1884).

4° $\sum \frac{1}{(a-c)(a-b)(x+a)^5} =$

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\left[\begin{array}{l}\sum \frac{1}{(x+a)^4} + \sum \frac{1}{(x+a)^3(x+b)} + \\ \sum \frac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} + \sum \frac{1}{(x+a)^2(x+b)(x+c)}\end{array}\right]$$

5° $$2(b-c)^2(c-a)^2 + 2(b-a)^2(a-c)^2 + 2(a-c)^2(b-c)^2 = (b-c)^4 + (c-a)^4 + (a-b)^4.$$

148. — On donne les côtés a_1, b_1, c_1 de la projection horizontale d'un triangle, et les cotes α, β, γ de ses sommets. Calculer l'aire de ce triangle.

Si a, b, c sont les côtés du triangle, on a :

$$a^2 = a^2_1 + (\beta - \gamma)^2,$$

et deux formules analogues pour b^2 et c^2; puis, si T est l'aire cherchée, T_1 celle de la projection :

$$16T^2 = \Sigma\, 2a^2b^2 - \Sigma\, a^4;$$

et tous calculs faits :

$$4T^2 = 4T^2_1 + a^2_1(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) + b^2_1(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) + c^2_1(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta).$$

149. — Si A'B'C' est le triangle qui a pour sommets les points où les bissectrices de ABC rencontrent le cercle circonscrit; le centre O de cercle, le centre I du cercle inscrit à ABC, et le centre de gravité de A'B'C' sont trois points en ligne droite.

Si on cherche, en effet, les coordonnées barycentriques du centre de gravité de A'B'C' par rapport à ABC, on trouve

$$\alpha : \beta : \gamma :: \sin A(3 \cos A + \cos B + \cos C - 1) : \ldots$$

(A suivre.)

CERTIFICAT D'APTITUDE

A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(Ordre des sciences.)

JUILLET 1889

Arithmétique et Algèbre (8 juillet, 5 h.).

Arithmétique. — 1° Définir le quotient de la division de deux nombres entiers.

Indiquer les différents cas qui peuvent se présenter dans la recherche du quotient de deux nombres entiers. Après quelques explications sommaires, arriver au cas général : faire le raisonnement et donner la règle à suivre sur l'exemple suivant : trouver le quotient de 482732 par 684;

2° On divise successivement un nombre entier N par un nombre entier a, puis le quotient par un autre nombre entier b, puis le nouveau quotient par un troisième nombre entier c et ainsi de suite. Démontrer que le quotient final ainsi trouvé est égal à celui de la division de N par le produit des nombres a, b, c, etc.

Des divisions faites primitivement peut-on déduire le reste de la division de N par le produit $a.b.c...$?

Peut-on intervertir l'ordre des divisions successives indiquées dans ce théorème ?

Algèbre. — On joint un des foyers F d'une demi-ellipse, limitée par son grand axe AA', à un point M de cette courbe; du point M on trace deux droites, savoir : MC perpendiculaire sur AA' et MD perpendiculaire sur FM, limitées toutes les deux, d'une part au point M et d'autre part au grand axe AA', prolongé s'il le faut. En faisant tourner autour de AA' comme charnière le triangle rectangle MCD ainsi construit, on obtient un solide dont on représente le volume par V.

Étudier les variations de ce volume V lorsque le point M décrit la demi-ellipse donnée. Construire la courbe représentative de ces variations.

De cette étude, déduire le nombre de solutions qu'aura, selon les différents cas qui peuvent se présenter, le problème suivant : trouver le point M dont il est question ci-dessus, de telle sorte que V ait une valeur donnée V_1, et indiquer, sur la demi-ellipse donnée, les diverses régions où seront placés les points M répondant à la question.

On représentera, comme d'habitude, par $2a$ et $2c$ le grand axe et la distance focale de la demi-ellipse donnée.

Géométrie et mécanique (10 juillet, 5 h.).

I. — L'équation d'une courbe étant $f(x, y) = 0$, trouver l'équation de la tangente en un point donné de cette courbe. — Comment en déduit-on l'équation de la ligne des contacts des tangentes menées par un point P du plan ?

II. — On donne une ellipse et un point P, on trace un diamètre quelconque OD et, du point P, on mène à ce diamètre la perpendiculaire PM jusqu'à la rencontre en M du diamètre OE, conjugué de OD

1° Trouver la courbe C qui est le lieu géométrique du point M.

2° Démontrer que les lignes menées du point P aux points d'intersection de cette courbe C avec l'ellipse donnée sont normales à l'ellipse. Que devient la courbe C, quand le point P coïncide avec un foyer F de l'ellipse ? Explication géométrique ?

3° On considère toutes les coniques qui passent par les points communs à la courbe C et à l'ellipse; trouver et construire le lieu géométrique de leurs centres. — Quelles sont les directions asymptotiques de cette dernière courbe ?

III. — Démontrer qu'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide libre peut toujours se réduire à deux résultantes dont l'une est appliquée en un point donné du solide. — Cette réduction n'est-elle possible que d'une seule manière ? — Comment peut-on ramener les deux résultantes à être rectangulaires ?

QUESTION 287

Solution par M. A. Boutin.

Sur le côté AC *d'un triangle rectangle* ABC, *on prend le point* D, *de telle sorte que* $\frac{AD}{CD} = \frac{m}{n}$. *Par* D, *on élève, sur* AC, *la perpendiculaire* DEF; F, E *étant les intersections de cette perpendiculaire avec les côtés* AB, BC, *montrer qu'on a les relations:*

$$(\alpha) \qquad \frac{AC^h}{BP^h} = \frac{(m+n)^h(AF^h \pm CE^h)}{m^h BC^h \pm n^h AB^h},$$

$$(\beta) \qquad S = \frac{mn(m+n)^2 AF^3 . CE^3}{2(n^2AF^2 + m^2CE^2)^2}.$$

Dans ces expressions, BP *est la perpendiculaire menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse;* S *est l'aire du triangle* ABC. (G. Russo.)

1° On a, successivement,

$$AD = \frac{mAC}{m+n}, \qquad CD = \frac{nAC}{m+n};$$

$$\frac{AC}{BP} = \frac{AC}{AC\cos A\cos C},$$

$$\frac{AC^h}{BP^h} = \frac{AC^h}{AC^h\cos^h A\cos^h C} = \frac{AC^h(m^h\cos^h C \pm n^h\cos^h A)}{AC^h\cos A\cos^h C(m^h\cos^h C \pm n^h\cos^h A)}.$$

$$\frac{AC^h}{BP^h} = \frac{(m+n)^h\left[\frac{m^hAC}{(m+n)^h\cos^h A} \pm \frac{n_hAC^h}{(m+n)^h\cos^h C}\right]}{m^hAC^h\cos^h C \pm n^hAC^h\cos^h A}$$

$$= \frac{(m+n)^h\left[\frac{AD^h}{\cos^h A} \pm \frac{CD^h}{\cos^h C}\right]}{m^hBC^h \pm n^hAB^h} = \frac{(m+n)^h(AF^h \pm CE^h)}{m^hBC^h \pm n^hAB^h}.$$

2° $2S = AC.BP = AC^2\cos A\cos C = \frac{AC^2\cos A\cos C^2}{(\cos^2 A + \cos^2 C)}$

$$= \frac{\frac{m^4n^4}{(m+n)^4}\cdot\frac{AC^6}{\cos^3 A.\cos^3 C}}{\frac{m^4n^4}{(m+n)^4}AC^4\left(\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 C}\right)}$$

$$= \frac{mn(m+n)^2\left[\frac{mAC}{(m+n)\cos A}\right]\left[\frac{nAC}{(m+n)\cos C}\right]}{\left[n^2\,\frac{m^2AC^2}{(m+n)^2\cos^2 A} + m^2\,\frac{n^2AC^2}{(m+n)^2\cos^2 C}\right]^2}$$

$$= \frac{mn(m+n)^2.AF^2.CE^2}{(n^2AF^2 + m^2CE^2)^2}.$$

QUESTION 304

Solution par M. E. Vigarié.

Soient O *le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC, *et* I, I_a, I_b, I_c *les centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits.*

On prend sur les côtés BA, CA, *vers le sommet* A, *les longueurs* BB′ = CC′ = BC, *et aussi, dans la direction opposée*, BB″ = CC″ = BC.

Cela posé :

1° Les droites B′C′, B″C″, B′C″, B″C′ *sont respectivement perpendiculaires aux droites* OI, OI_a, OI_b, OI_c;

2° Les rayons des cercles circonscrits aux triangles AB′C′, AB″C″, AB′C″, AB″C′ *sont, respectivement, égaux à* OI, OI_a, OI_b, OI_c.

(J. Neuberg.)

1° Considérons l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle inscrit : il est perpendiculaire à OI et coupe BA, CA, respectivement, en P, Q. Donc :

$$PA(PA + AB) = [PA + (p - a)]^2$$
$$QA(QA + AC) = [QA + (p - a)]^2,$$

d'où

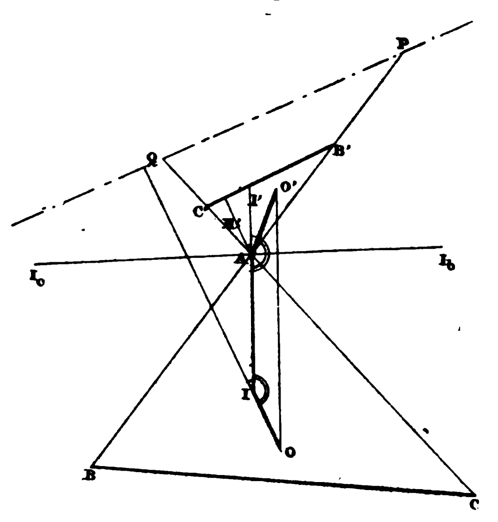
$$PA = \frac{(p-a)^2}{2(p-a) - c}, \qquad QA = \frac{(p-a)^2}{2(p-a) - b}.$$

Donc :

$$\frac{PA}{QA} = \frac{(p-a)^2}{2(p-a) - c} \times \frac{2(p-a) - b}{(p-a)^2} = \frac{a-c}{a-b} = \frac{B'A}{C'A}.$$

La droite B′C′, étant parallèle à l'axe radical des deux cercles O et I, est perpendiculaire à OI.

On démontrerait, de la même manière, que $B''C''$, $B'C''$, $C'B''$ sont, respectivement, perpendiculaires à OI_a, OI_b, OI_c.



2° Soit O' le centre du cercle circonscrit au triangle $AB'C'$. Les points I et O sont, respectivement, l'orthocentre et le centre du cercle des neuf points du triangle $I_aI_bI_c$; donc la droite I_bI_c, axe radical des deux cercles O, O', est perpendiculaire à AI; autrement dit, AI et OO' sont parallèles.

Soient I' et H' le centre du cercle inscrit et l'orthocentre du triangle $AB'C'$. On a :

$$\widehat{H'AI'} = \widehat{I'AO'};$$

et comme $B'C'$ est perpendiculaire à OI :

$$\widehat{H'AI'} = \widehat{I'AO'} = 180^\circ - \widehat{AIO}.$$

Donc: $$\widehat{O'AI} = 180^\circ - \widehat{I'AO'} = \widehat{AIO}.$$

La figure O'AIO est, par conséquent, un trapèze isoscèle. Donc IO = O'A.

On démontrerait, de même, que les rayons des cercles circonscrits aux triangles $AB''C''$, $AB'C''$, $AB''C'$ sont respectivement égaux à OI_a, OI_b, OI_c.

Nota. — Dans sa Note de *Géométrie et de Mécanique* (*J. E.* 1888, p. 47), M. Neuberg a montré, en donnant les solutions des questions 240, 241 et 273, comment l'application du théorème de la composition des forces, en Mécanique, peut donner, facilement, la solution de problèmes de Géométrie. Dans la Note que nous venons de rappeler, M. Neuberg a résolu, en par-

tie, la question 304. Voici d'ailleurs, de cette dernière question, une solution simple que M. Neuberg a communiquée à M. Gob (Voir *Notes de Géométrie récente* dans les *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège, 2e série, tome XVI*) :

Les bissectrices AI, BI, CI rencontrent la circonférence ABC aux sommets d'un triangle LMN, dont ces droites sont les hauteurs. Il suit de là que trois forces, représentées par OL, OM, ON, ont une résultante représentée par OI.

Si, maintenant, nous prenons sur BA, CA, les longueurs BP = CQ = BC, la droite PQ représente la résultante des trois droites PB, BC, CQ égales entre elles et perpendiculaires, respectivement à ON, OL, OM; donc PQ est également perpendiculaire à OI. De plus, PQ : OI = BC : OL = 2 sin A. On conclut de là que OI est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle APQ.

Le cercle APQ et les deux autres, analogues à celui-ci, ont été indiqués par M. A. Gob *(loc. cit.)* comme une généralisation des *cercles de Neuberg*, que nous avons étudiés dans ce Journal (1887, pp. 121, 145, 169).

Nota. — Autres solutions par M. B. S. Sollertinsky, à Gatschina, Svéchnicoff, professeur au gymnase de Troïtzk, et A. Boutin.

QUESTIONS PROPOSÉES

356. — Dans un triangle ABC, si l'on abaisse, d'un point M sur AB, AC les perpendiculaires MP, MQ puis si l'on joint M au milieu de PQ; le lieu de M tel que cette dernière droite soit perpendiculaire à BC est la symédiane menée de A.

(Poujade.)

357. — Par un point D pris sur BC, dans le triangle ABC, on trace une droite EDF antiparallèle à BC, relativement à l'angle A.

1° La circonférence qui passe par B, C, E, F coupe orthogonalement la circonférence décrite sur AD comme diamètre.

2° Si M, N sont les points où cette circonférence rencontre AD, et que M′, N′ soient les points inverses de MN relativement à ABC, les droites MM′, NN′ sont parallèles à BC.

(Bernès.)

358. — AD, AD′ étant, relativement à l'angle A du triangle ABC, deux droites antiparallèles, qui rencontrent en E, E′ la circonférence circonscrite à ABC; on trace par E dans l'angle EAC, EF, antiparallèle à DC, et par E′ dans l'angle E′AC, E′F′ antiparallèle à D′C.

1° Les droites BF, BF′ sont antiparallèles relativement à l'angle BAC; 2° si M′ est l'un des points de rencontre de AD′ et de la circonférence circonscrite à FBC, et M le point du même côté de BC, où AD est rencontré, par la circonférence circonscrite à F′BC, MM′ est antiparallèle à DD′, relativement à DAD′, et les points M, M′ sont inverses l'un de l'autre, dans le triangle ABC. *(Bernès.)*

359. — Si les droites AE, CF, menées des extrémités d'une diagonale AC du quadrilatère ABCD, parallèlement à deux côtés opposés, coupent les deux autres côtés aux points E, F, la droite EF est parallèle à l'autre diagonale BD.

Déduire de cette propriété, que, si M, N divisent AB, CD dans un même rapport, la somme des aires ANB, CMD est égale à l'aire ABCD (J. Neuberg *Mathesis*, t. II, p. 158) (*).

(B. Sollertinsky.)

360. — Si les droites OA, OA′ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle XOY, et si B, C, B′, C′, sont les projections de A, A′ sur OX, OY : 1° les triangles ABC, A′B′C′ sont en perspective; 2° les perpendiculaires abaissées des points de concours des côtés homologues, sur les droites joignant les sommets opposés, concourent en un même point.

(B. Sollertinsky.)

361. — Trouver la valeur, pour $x = 1$, de la fraction :

(*) Solution algébrique. — *Mathesis*, t. III, p. 140.

$$\frac{(x^m - 1)(x^n - 1) - mn(x - 1)^2}{(x - 1)^3}$$ *(Dellac.)*

362. — M, N, P étant trois angles consécutifs d'un quadrilatère inscrit, former

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\sin(M+N), & \sin M, & 0, & \sin N, \\ \sin M & -\sin(N+P), & \sin N, & 0, \\ 0, & \sin N, & \sin(M+N), & \sin M \\ \sin N, & 0, & \sin M, & \sin(N+P) \end{vmatrix}.$$

Plus généralement, former

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -h, & f, & o, & g \\ f, & -h', & g, & o \\ o, & g & h, & f \\ g, & o & f, & h' \end{vmatrix}.$$ *(Catalan.)*

363. — Si, à un quadrilatère inscriptible Q, on inscrit une infinité de quadrilatères P dont le périmètre soit minimum, ce minimum commun est une quatrième proportionnelle au rayon et aux diagonales de Q. *(Catalan.)*

ERRATA

N° 2, p. 47, l. 13,	*au lieu de*	BB″,	*lisez*	BB′.
l. 16,	—	EM_a, DM_b,	—	EM, DM′.
l. 18,	—	jC′,	—	jR′.
l. 19,	—	R″M,	—	R″M′.

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7124-4-90.

PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Par M. **Louis Bénezech.**

(*Suite*, voir p. 73.)

5. — Les triangles rectangles AI_aI_c, AII_b donnent :

$$\overline{AI_a}^2 + \overline{AI_c}^2 = \overline{I_aI_c}^2,$$
$$\overline{AI}^2 + \overline{AI_b}^2 = \overline{II_b}^2.$$

Ajoutons membre à membre

$$\overline{AI}^2 + \overline{AI_a}^2 + \overline{AI_b}^2 + \overline{AI_c}^2 = \overline{II_b}^2 + \overline{I_aI_c}^2 = 4(\overline{AB'}^2 + \overline{AB''}^2) = 16R^2,$$

d'où

$$\overline{AI}^2 + \overline{AI_a}^2 + \ldots + \overline{BI}^2 + \overline{BI_a}^2 + \ldots + \overline{CI}^2 + \overline{CI_a}^2 + \ldots$$
$$= \overline{II_a}^2 + \overline{II_b}^2 + \overline{II_c}^2 + \overline{I_aI_b}^2 + \overline{I_bI_c}^2 + \overline{I_cI_a}^2 = 48R^2;$$

par conséquent :

Théorème VIII. — *Dans tout triangle, la somme des carrés des distances d'un sommet quelconque aux centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits est égale à seize fois le carré du rayon du cercle circonscrit.*

Théorème IX. — *Dans tout triangle, la somme des carrés des distances des sommets aux centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits et la somme des carrés des distances des centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits, prises deux à deux, sont égales entre elles et égales à quarante-huit fois le carré du rayon du cercle circonscrit.*

Théorème X. — *Dans tout triangle, rectangle en* A, *la somme des carrés des distances d'un sommet quelconque aux centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits est égale à* $4a^2$; *et, réciproquement.*

6. — Considérons les perpendiculaires abaissées des points C', B', A' sur BC.

C' étant le milieu de II_c, la perpendiculaire correspondante a pour longueur $\frac{\gamma + \gamma_c}{2}$; de même, les perpendiculaires des points B', A' ont pour longueurs $\frac{\gamma + \gamma_b}{2}$, $\frac{\gamma_a - \gamma}{2}$. La somme des

longueurs de ces perpendiculaires est donc : $\dfrac{\gamma + \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c}{2}$ $= 2R + \gamma$.

Considérons, de plus, les perpendiculaires abaissées des points A″, B″, C″ sur BC.

Ces perpendiculaires ont respectivement pour longueurs $\dfrac{\gamma_b + \gamma_c}{2}$, $\dfrac{\gamma_a - \gamma_c}{2}$, $\dfrac{\gamma_a - \gamma_b}{2}$. Par suite, leur somme est γ_a; et la somme des perpendiculaires abaissées des points A″ B″ C″ sur les trois côtés est $\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c = 4R + \gamma$.

De ce qui précède, on conclut :

Théorème XI. — *Si des points de rencontre A′, B′, C′ des bissectrices intérieures des angles d'un triangle avec le cercle circonscrit, on abaisse des perpendiculaires sur l'un quelconque des côtés, la somme des longueurs de ces perpendiculaires est égale à la somme du diamètre du cercle circonscrit et du rayon du cercle inscrit.*

Théorème XII. — *Si, des points de rencontre A″, B″, C″ des bissectrices extérieures des angles d'un triangle avec le cercle circonscrit, on abaisse des perpendiculaires sur l'un de ses côtés, la somme des longueurs de ces perpendiculaires est égale au rayon du cercle ex-inscrit correspondant.*

Théorème XIII. — *Si, des mêmes points A″, B″, C″, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés du triangle, la somme de ces perpendiculaires est égale à la somme du rayon du cercle inscrit et du double du diamètre du cercle circonscrit.*

7. — Dans les triangles $AI'_bI'_c$, $AI'I'_a$ on a :

$$\overline{AI'_b}^2 + \overline{AI'_c}^2 = 2\overline{AM_a}^2 + 2\overline{M_aI'_b}^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{(b+c)^2}{2}$$

$$\overline{AI'}^2 + \overline{AI'_a}^2 = 2\overline{AM_a}^2 + 2\overline{M_aI'_a}^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{(b-c)^2}{2}$$

d'où

$$\overline{AI'}^2 + \overline{AI'_a}^2 + \overline{AI'_b}^2 + \overline{AI'_c}^2 = 3(b^2 + c^2) - a^2$$

et

$$\overline{AI'}^2 + \overline{AI'_a}^2 + \ldots + \overline{BI''}^2 + \overline{BI''_a}^2 + \ldots + \overline{CI'''}^2 + \overline{CI'''_a}^2 + \ldots$$
$$= 5(a^2 + b^2 + c^2) = 80R^2 - 5(\gamma^2 + \gamma_a^2 + \gamma_b^2 + \gamma_c^2)$$

relation qui donne ce théorème :

Théorème XIV. — *La somme des carrés des distances des sommets d'un triangle aux points de contact du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits, avec les côtés opposés, est égale à cinq fois la somme des carrés des côtés.*

8. — Le cercle O étant le cercle des neuf points du triangle $I_aI_bI_c$, les médiatrices de ce triangle se coupent en un point ω, centre du cercle circonscrit au triangle $I_aI_bI_c$ et par conséquent symétrique de I par rapport à O. La droite $I_aI'_a$, symétrique de la hauteur I_aA du triangle $I_aI_bI_c$ par rapport à la bissectrice de l'angle I_a passe par ce point ω; il en est de même des droites $I_bI''_b$, $I_cI'''_c$.

Le cercle O, qui passe par les milieux B'A'C' des côtés du triangle II_bI_c est aussi le cercle des neuf points de ce triangle; les médiatrices de ce triangle concourent donc au point ω_a, centre du cercle circonscrit au triangle II_bI_c, symétrique de I_a, par rapport à O. On verrait, comme plus haut, que les droites II', $I_bI'''_b$, $I_cI''_c$ se coupent en ce point ω_a.

Observons enfin que, d'après une propriété des symédianes, les droites I_aM_a, I_bM_b, I_cM_c, sont les symédianes du triangle $I_aI_bI_c$.

Théorème XV. — *Dans tout triangle, les parallèles menées des points où les bissectrices extérieures des angles coupent le cercle circonscrit aux bissectrices intérieures correspondantes; et les perpendiculaires abaissées des centres des cercles ex-inscrits sur les côtés correspondants du triangle, concourent en un même point symétrique du centre du cercle inscrit, par rapport au centre du cercle circonscrit.*

Remarque. — On énoncerait de même les théorèmes analogues au précédent, relatifs aux triangles II_aI_b, II_bI_c, II_cI_a.

Théorème XVI. — *Dans tout triangle, les droites qui joignent les centres des cercles ex-inscrits, aux milieux des côtés correspondants, sont concourantes.* *(A suivre.)*

UN EXERCICE DE GÉOMÉTRIE

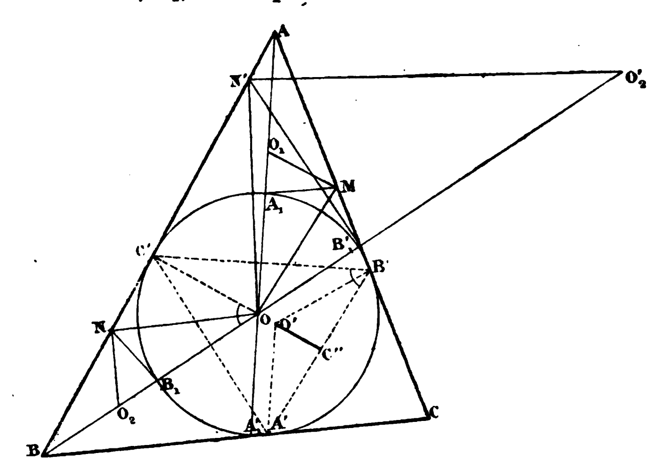
Par M. **B. Sollertinsky**, à Gatschina.

Soient : r *le rayon d'un cercle* Δ *tangent aux trois côtés du triangle* ABC*;* r_1, r'_1 *les rayons des circonférences touchant deux côtés du triangle et le cercle* Δ. *Démontrer les égalités :*

$$(1)\qquad \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1} = r,$$

$$(2)\qquad \frac{1}{\sqrt{r'_1 r'_2}} + \frac{1}{\sqrt{r'_2 r'_3}} + \frac{1}{\sqrt{r'_3 r'_1}} = \frac{1}{r}.$$

1° Soient A′, B′, C′ les points de contact du cercle Δ avec les côtés de ABC, B_1, B'_1 les points où la droite BO rencontre le



cercle Δ; de plus, soit B_1 celui de ces points qui appartient

(*) Cet énoncé rectifie et généralise celui qu'a proposé récemment M. A. Goldenberg, professeur à Saint-Pétersbourg, dans le Journal « *Messager de physique expérimentale et de mathématiques élémentaires* », publié à Kiev.

Il y a deux cercles touchant deux côtés du triangle et le cercle inscrit. Les quantités r_1, r_2, r_3 désignent le rayon des circonférences considérées qui, après avoir touché deux côtés, coupent le troisième en des points imaginaires.

à l'arc A'C' dont la convexité est tournée vers B. On a donc

$$\widehat{B_1OC'} = \widehat{A'B'C'}.$$

Si la perpendiculaire élevée en B_1 sur BB_1 coupe AB en N, et si la bissectrice de l'angle BNB_1 coupe BB_1 en O_2, le point O_2 est le centre du cercle Δ_2 tangent aux côtés BA, BC et au cercle Δ, en B_1, et l'on a

$$O_2B_1 = r_1.$$

Le triangle O_2NO étant rectangle en N, on a

$$NC' = NB_1 = \sqrt{O_2B_1 . B_1O} = \sqrt{rr_2}.$$

Soient : O' le centre du cercle inscrit dans le triangle A'B'C'; r' son rayon; A", B", C" les points de contact avec les côtés et $2p'$ le périmètre de A'B'C'.

Puisque $\widehat{NOC'} = \frac{1}{2}\widehat{B_1OC'} = \frac{1}{2}\widehat{A'B'C'} = \widehat{O'B'C''}$, les triangles rectangles NOC', O'B'C" sont semblables; donc

$$\frac{NC'}{C'O} = \frac{O'C''}{C''B'}, \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{rr_2}}{r} = \sqrt{\frac{r_2}{r}} = \frac{r'}{p' - b'}.$$

On a, de même,

$$\sqrt{\frac{r_1}{r}} = \frac{r'}{p' - a'}, \qquad \sqrt{\frac{r_3}{r}} = \frac{r'}{p' - c'}.$$

et, par suite,

$$\frac{1}{r}\sum\sqrt{r_1r_2} = r'^2\sum\frac{1}{(p'-a')(p'-b')} = \frac{(r'p')^2}{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')} = 1.$$

2° On a d'abord,

$$N'C' = N'B'_1 = \sqrt{rr'_2}.$$

Mais $\widehat{NON'}$ est droit, puisqu'il est formé par les bissectrices de deux angles adjacents. On a donc

$$\overline{OC'}^2 = NC'.N'C',$$

d'où

$$\sqrt{r_2} = \frac{r}{\sqrt{r'_2}}.$$

Par suite $\quad r = \sum\sqrt{r_1r_2} = r^2\sum\frac{1}{\sqrt{r'_1r'_2}},$

ou finalement $\quad \sum\frac{1}{\sqrt{r'_1r'_2}} = \frac{1}{r}.$

ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Auguste Morel.**

(*Suite*, voir p. 78.)

32. Problème. — *Étant donnée une sécante menée par un point* O, *calculer le produit* OP × OQ *des segments déterminés sur cette sécante par les points de rencontre avec la conique.*

Décrivons le cercle *excentrique du point* O; la droite QPO rencontre la directrice DD_1 au point R; FR coupe le cercle aux points p et q, tels que Op, Oq sont respectivement parallèles à FP, FQ. Cela posé, les triangles semblables ROp, RPF donnent

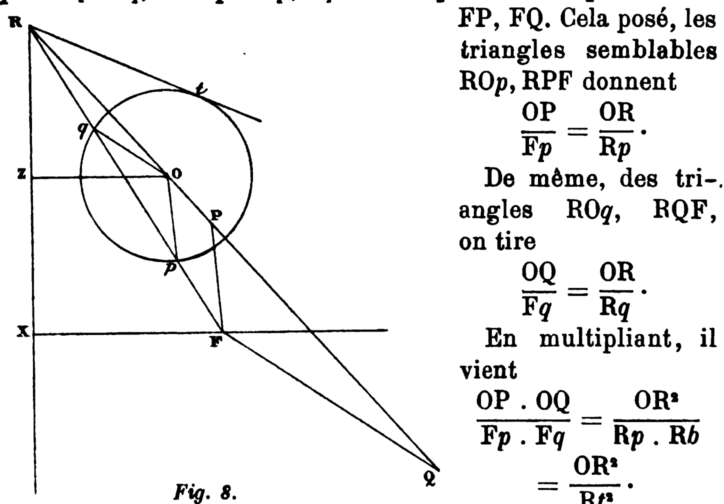


Fig. 8.

$$\frac{OP}{Fp} = \frac{OR}{Rp}.$$

De même, des triangles ROq, RQF, on tire

$$\frac{OQ}{Fq} = \frac{OR}{Rq}.$$

En multipliant, il vient

$$\frac{OP \cdot OQ}{Fp \cdot Fq} = \frac{OR^2}{Rp \cdot Rb} = \frac{OR^2}{Rt^2}.$$

Or, le point O étant donné, le cercle excentrique est connu de rayon; par conséquent le produit $Fp \cdot Fq$ est connu. Le second membre ne dépend que de la direction de la corde; car, pour une direction donnée, le triangle ORZ est connu, et par suite, le rapport $\frac{OR}{OZ}$ est connu. Il en est de même du rapport $\frac{Ot}{OZ}$, qui est égal à l'excentricité; et par suite l'expression

$\frac{OR^2 - Ot^2}{OZ^2}$, ou $\frac{Rt^2}{OZ^2}$, est déterminée. On connaît donc $\frac{OR^2}{Rt^2}$, et par suite le produit OP . OQ.

33. Corollaire I. — Considérons deux cordes issues d'un même point O, et rencontrant la directrice aux points R, R'. Soient P, Q les points d'intersection de la première droite avec la conique; P', Q' les points d'intersection de la seconde avec la conique. Nous avons

$$\frac{OP \cdot OQ}{OP' \cdot OQ'} = \frac{OR^2}{Rt^2} : \frac{OR'^2}{R't'^2}.$$

Considérons maintenant un autre point O_1; et, par ce point, traçons les droites O_1P_1, O_1P_1' respectivement parallèles à OP, OP'; nous avons aussi

$$\frac{O_1P_1 \cdot O_1Q_1}{O_1P_1' \cdot O_1Q_1'} = \frac{O_1R_1^2}{R_1t_1^2} : \frac{O_1R_1'^2}{R_1't_1'^2}.$$

Mais les seconds membres des égalités précédentes sont égaux. En effet, comme on l'a observé plus haut, le rapport $\frac{OR^2}{Rt^2}$ ne dépend que de la direction de OR; il est donc égal à $\frac{O_1R_1^2}{R_1t_1^2}$. Pour la même raison, nous pouvons dire que

$$\frac{OR'^2}{R't'^2} = \frac{O_1R_1'^2}{R_1't_1'^2}.$$

On aboutit ainsi à la propriété suivante, particulièrement remarquable:

Si, par un point quelconque du plan d'une conique, on mène des sécantes parallèles à deux directions fixes, le rapport des rectangles des segments déterminés sur les cordes, par le point, est indépendant de la position du point et ne dépend que de la direction des cordes.

34. Corollaire II. — Pour que les rectangles des segments déterminés sur les deux cordes soient égaux, il faut que l'on ait :

$$\frac{OR^2}{Rt^2} = \frac{OR'^2}{R't'^2}.$$

Or, pour une direction donnée de cordes, on a $OR = OZ.m$;

puis $Ot = k.OZ$. Ainsi, les deux nombres m et m' doivent vérifier l'égalité

$$\frac{m^2}{m^2 - k^2} = \frac{m'^2}{m'^2 - k^2}.$$

ce qui entraîne la relation

$$m = m';$$

Par suite, les droites OR, OR' doivent être égales entre elles; ce qui exige qu'elles soient également inclinées sur OZ, et, par suite, sur l'axe.

35. Théorème. — *Si un cercle coupe une conique en quatre points et que l'on joigne ces points deux à deux, chacun des couples de droites ainsi menées forme deux droites déterminant avec chacun des axes un triangle isoscèle.*

Soient, en effet P, Q, M, N les quatre points communs. Les droites PQ, MN se coupent en un point O; et, ces quatre points étant sur un cercle, on a

$$OP.OQ = OM.ON.$$

Ainsi, d'après le corollaire précédent, les droites OPQ, OMN sont également inclinées sur l'axe.

36. Problème. — *Mener, par un point* T, *une tangente à une conique dont on connaît un foyer, la directrice et le sommet.*

Prenons le cercle excentrique du point T; et, par le foyer F, menons à ce cercle des tangentes Fm, Fn. La tangente Fm rencontre la directrice en A; la droite TH est tangente à la conique. Pour avoir le point de contact, menons Tm; et, par le point F, une droite FM, parallèle à Tm; M est le point de contact cherché.

La tangente Fn donne, de même, une seconde tangente TN.

37. Problème. — *Mener, parallèlement à une direction donnée, une tangente à une conique dont on connaît un foyer, la directrice et le sommet correspondant.*

Si nous pouvons déterminer les points de rencontre de la courbe et du diamètre conjugué de la direction donnée, nous aurons les points de contact des tangentes cherchées.

Pour cela, par le sommet, traçons une parallèle AB à la direction donnée, et cherchons le second point d'intersection B de cette droite et de la courbe, en décrivant le cercle excentrique du point A, qui passe par le foyer F, et en cherchant le point b où il rencontre la droite FC.

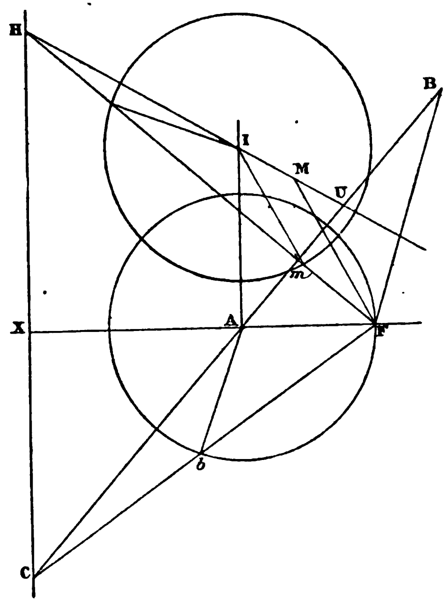


Fig. 9.

Menons ensuite FB, parallèle à Ab; nous avons le point B. Prenons le milieu U de AB, et joignons-le au point H où la directrice rencontre la perpendiculaire menée du foyer à la direction AB. La droite UH est le diamètre conjugué de AB.

Pour trouver les points d'intersection de UH et de la conique, prenons le point I de UH qui se trouve sur la parallèle à la directrice menée par le point A. Le cercle excentrique du point I est égal au cercle excentrique du point A; il rencontre FH en deux points m, n; en menant FM, FN respectivement parallèles à Im et In, nous aurons les points de rencontre du diamètre HU avec la courbe, et, par conséquent, les points de contact des tangentes demandées.

Sur la figure, le point M est seul déterminé; le point N se trouvant hors des limites du cådre.

(A suivre.)

SUR L'ORIGINE DU MOT *ORTHOCENTRE*

Par M. **E. Vigarié.**

Depuis quelques années on emploie le terme *orthocentre* pour désigner le point de concours des hauteurs d'un triangle. Ce néologisme commode a été, inexactement, présenté comme dû à James Booth.

Cette dénomination paraît avoir été introduite en France par M. A. Morel, dans la traduction de plusieurs passages d'un ouvrage de James Booth qu'il publia, en 1879, dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*. M. Morel disait : « L'auteur (J. Booth) a précédemment défini le triangle orthocentrique, le triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs. Le point de concours des hauteurs a été appelé par lui *orthocentre.* » Or, après avoir parlé des transversales réciproques et des points inverses, James Booth, s'occupant du point de concours des hauteurs s'exprime ainsi : « Ce point que l'on rencontre souvent en Géométrie, *a été appelé par quelques géomètres, l'orthocentre.* Nous adopterons désormais ce terme. » Et il ajoute « le triangle formé en joignant les pieds des trois hauteurs pourra dès lors être appelé *triangle orthocentrique* ».

James Booth étant mort en 1878, nous nous sommes adressé pour nous renseigner plus exactement, à M. R. Tucker, dont la compétence en ces matières est incontestable, et à M. H. Besant que M. T. C. Simmons nous avait signalé comme étant le promoteur du mot *orthocentre*, « ce terme, nous écrivait dernièrement M. Besant, a été proposé par M. le Dr Ferrers et par moi à Cambridge en 1866-67. Trouvant longue et incommode cette phrase : *point d'intersection des perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés* (*), nous avons, pour la remplacer, adopté le terme d'orthocentre,

(*) On disait, et l'on dit encore dans l'enseignement, *point de concours des hauteurs*, ou, quelquefois, *centre des hauteurs* pour désigner le point de concours des hauteurs du triangle ; et cette dernière périphrase nous semble presque aussi simple que le terme *orthocentre* qui deviendra

que nous avons formé avec deux mots grecs. Dans les écrits, cette dénomination a été employée pour la première fois dans le chapitre sur l'hyperbole équilatère de mon ouvrage *Geometrical conics* (*) paru en 1869... »

D'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit (*J. S.*, 1887, p. 39), M. H. Besant avait indiqué ce terme à ses élèves dès 1870. M. Tucker nous a en outre fait remarquer qu'on trouve ce néologisme dans un article de M. Besant, paru, la même année, dans *The Quarterly Journal;* « mais, en 1866, dans la même publication, il se servait de l'expression « point d'intersection des perpendiculaires ».

D'après ces renseignements, M. H. Besant serait donc l'inventeur du mot *orthocentre* attribué à tort, à J. Booth.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

JUILLET 1889

Section des Sciences mathématiques.

Algèbre et Trigonométrie (8 juillet, 7 h.)

1° Quelles sont la plus grande et la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à l'un des côtés d'un triangle dont le périmètre est égal à 12 mètres et dont la surface mesure 6 mètres carrés?

2° Soient a, b, c, les trois côtés d'un triangle; on désigne par a le plus grand côté et par c le plus petit; de sorte que l'on a

$$a > b > c.$$

On demande entre quelles limites reste compris a, entre quelles limites restent compris b et aussi c, lorsque l'on considère tous les triangles dont le périmètre est égal à 12 mètres et dont la surface mesure 6 mètres carrés?

Nota. — La solution exigeant la résolution d'équations de degré supérieur au second, les candidats devront résoudre ces équations numériquement, à 0.001 près, par approximations successives.

---

difficilement classique. C'est que, en effet, le néologisme en question est surtout utile, dans la Géométrie du triangle, par les expressions diverses qu'on y peut rattacher (le triangle orthocentrique, par exemple, cité plus haut); mais cet avantage apparaît peu dans l'enseignement classique de la Géométrie élémentaire. G. L.

(*) M. H. Besant est l'auteur de plusieurs ouvrages de mathématiques très appréciés en Angleterre. Parmi ceux-ci nous citerons : *A treatise on Dynamics*, — *Hydrostatics*, 12° édition, — *Hydromechanics*, 4° édition, — *Conic Sections treated geometrically*, 6° édition. *Notes ou Roulettes and Glissettes*, 1870. (Voyez, dans les *Nouvelles Annales*, une analyse détaillée de cet ouvrage; 1871.)

Géométrie descriptive (9 juillet, 7 h.).

Un tétraèdre ABCD a ses arêtes opposées égales deux à deux, savoir, en centimètres :

$$AB = CD = 9, \quad AC = BD = 8, \quad AD = BC = 7.$$

1° On demande de placer ce tétraèdre de telle manière que les arêtes AB et CD soient horizontales, AB au-dessus de CD, et que l'arête AC soit parallèle au plan vertical de projection, le tétraèdre tout entier étant en avant du plan vertical contenant AC ; enfin le sommet A devra être à gauche et le sommet C à droite de l'épure. Trouver les centres et les rayons des sphères circonscrite, inscrite et ex-inscrites au tétraèdre ; dire quelle est la figure formée par ces centres et les sommets du tétraèdre ;

2° Des sommets du tétraèdre on abaisse les perpendiculaires sur les faces opposées : ces quatre hauteurs sont sur un même hyperboloïde. On demande de représenter la portion de cet hyperboloïde qui est intérieure au parallélipipède rectangle formé par les plans horizontaux qui contiennent les arêtes AB et CD, par les plans parallèles au plan vertical qui contiennent l'un l'arête AC, l'autre le sommet B, et par les plans de profil entre lesquels le tétraèdre est contenu.

Nota. — On espacera le plus possible les projections horizontale et verticale.

Mécanique.

L'arbre A d'une machine a $0^m,25$ de rayon. Une poulie B, de $0^m,10$ de rayon, est calée sur un axe qui est parallèle à l'arbre et qui a $0^m,01$ de rayon La tangente commune MN aux circonférences de l'arbre et de la poulie est horizontale.

I. Sur l'arbre et sur la poulie on place une barre MN pesant 50 kilogrammes, et portant un poids P de 750 kilogrammes, lequel est suspendu au-dessous du centre de gravité de MN. Au point N de MN est fixé, par une de ses extrémités, un cordon dont l'autre extrémité est attachée à un dynamomètre.

Après avoir supprimé la liaison entre l'arbre et les différents appareils dont il commande le mouvement, on met la machine en marche. L'arbre fait alors 20 tours par minute ; la verticale du centre de gravité de la barre MN est équidistante des axes de l'arbre et de la poulie ; enfin le dynamomètre indique que la tension T du cordon, supposé horizontal, est égale à 200 kilogrammes. Quelle est, en chevaux, et à l'allure de 20 tours par minute, la force de la machine :

1° En supposant que l'axe de la poulie, préalablement calé, ne puisse pas tourner sur ses coussinets ;

2° En supposant que l'axe de la poulie soit libre de tourner sur ses coussinets.

Le coefficient de frottement de la barre sur la poulie est égal à $\frac{1}{2}$; celui de l'axe de la poulie sur ses coussinets est égal à $\frac{1}{5}$. On néglige le poids de la poulie.

II. — On enlève la barre MN et on enroule sur l'arbre A une corde qui fait deux tours et demi sur la circonférence de cet arbre. L'une des extrémités de la corde est attachée à un point fixe du sol, l'autre extrémité

porte un poids Q. Dans ces conditions, la machine fait 10 tours à la minute et sa force est de 3 chevaux. On demande quelle est la valeur du poids Q.

Le coefficient de frottement de la corde sur l'arbre est égal à $\frac{1}{5}$. On néglige le poids de la corde.

BACCALAURÉAT ÈS-SCIENCES (juillet 1889).

ACADÉMIE DE GRENOBLE

Première Série. — 1° Résolution et discussion de l'équation

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Application à l'exemple:

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}.$$

2° Réduction des forces appliquées à un corps solide.

Note. — Dans l'application numérique, on doit observer que

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°.$$

On a, par suite,

$$\sin(60 - x) = \sqrt{2} \cos 60 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45°.$$

La solution la plus simple est donnée par l'égalité

$$60 - x = 45, \qquad \text{d'où } x = 15°, \text{ etc.}$$

Les formules connues

$$\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad \cos 15° = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}},$$

donnent d'ailleurs, comme vérification du résultat précédent,

$$\sqrt{3} \cos 15° - \sin 15° = \sqrt{2}.$$

Deuxième Série. — 1° Dans un triangle rectangle ABC, on connaît l'hypoténuse BC $= a$, et la somme l des deux côtés de l'angle droit et de la perpendiculaire AH abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse. Calculer cette hauteur AH et les côtés de l'angle droit. Discussion.

— 2° Énoncer le principe de la transmission du travail dans les machines, vérifier ce principe dans le cas de la poulie mobile, à cordons parallèles, et dans le cas d'un corps pesant en mouvement sur un plan incliné.

NOTE. — En posant BCA $= x$, on est conduit à l'équation trigonométrique

$$\frac{l}{a} = \sin x + \cos x + \sin x \cos x.$$

On posera, pour résoudre cette équation,

$$\sin 2x = y;$$

y est donné par une équation du second degré, etc.

TROISIÈME SÉRIE. — 1° A un cube donné on inscrit une sphère, puis on inscrit un cube à cette sphère, et une sphère dans ce dernier cube, et ainsi de suite indéfiniment. On demande : 1° la limite de la somme de tous les cubes; 2° la limite de la somme de toutes les sphères.

2° Extraction de la racine carrée d'un nombre, à moins de $\frac{1}{n}$ près. Théorie. Extraire la racine carrée de $\frac{3}{5}$ à moins de $\frac{1}{10}$.

NOTE. — Le côté ρ d'un cube inscrit à une sphère de rayon R est donné par la formule

$$\rho = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

D'après cela, en désignant par a_1 le côté du premier cube C_1 et par R_1 le rayon de la première sphère S_1, on voit que l'on doit sommer la progression géométrique décroissante

$$V = a_1^3\left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \ldots\right] = a_1^3\,\frac{3(9+\sqrt{3})}{26}.$$

La seconde somme est $V' = \frac{1}{6}\pi V.$

QUATRIÈME SÉRIE. — 1° Deux circonférences égales O et O', de rayon R, contiennent chacune le centre de l'autre; on demande de déterminer une troisième circonférence, telle que O'', tangente aux circonférences O et O' et à la ligne des centres. On pourra déterminer O'' par son rayon x et par la distance y de son point de contact I avec OO' à l'un des centres O ou O'.

2° Démontrer que le moment de la résultante de deux forces concourantes par rapport à un point de leur plan est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

NOTE. — Les triangles rectangles OO''I, O'O''I, donnent

$$(R + x)^2 = x^2 + (R + y)^2, \quad \text{et} \quad (R - x)^2 = x^2 + y^2.$$

Ces relations simplifiées deviennent

$$2Rx = y^2 + 2Ry, \quad \text{et} \quad R^2 - 2Rx = y^2.$$

On a donc $$2y^2 + 2Ry - R^2 = 0,$$
d'où $$y = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2},$$
et par suite, $$x = \frac{R\sqrt{3}}{4}.$$

De ces formules on déduit une construction très simple pour résoudre le problème proposé.

Soit AB la corde commune; du point K, milieu de AB, avec KA pour rayon, décrivons un arc de cercle; cet arc rencontre la droite OO' au point I. De plus, si au milieu de KA on élève une perpendiculaire, elle passe par le centre inconnu O". Celui-ci est donc déterminé par cette droite et par la perpendiculaire élevée, au point I, à la ligne OO'.

On peut citer ce problème comme présentant une application très heureuse de la méthode analytique. Le problème étant mis en équation, et celle-ci étant résolue, on est conduit à des formules permettant de trouver les éléments de la construction, par des tracés remarquablement simples.

Cinquième Série. — 1° On donne le volume d'un tronc de cône, ainsi que sa hauteur et le rayon de l'une de ses bases : calculer l'autre rayon. Discussion. Conditions de possibilité.

2° Quelle est la limite de $\sqrt[n]{a}$ quand n, entier, croît indéfiniment? Démonstration.

QUESTION 289

Solution par M. Ignacio Beyens, capitaine du Génie, Cadix.

Sur les côtés d'un triangle FGL, *on prend* FK = f, GI = g; *puis on trace les perpendiculaires* KN, IN *à ces côtés. Prouver que*

$$\overline{LN}^2 = \frac{1}{\sin^2 L}(f^2 + g^2 + l^2 - 2gl \cos F - 2fl \cos G - 2fg \cos L).$$

Dans cette égalité, f, g, l *désignent les côtés du triangle* FGL.

On a $$KL = FL - KL = g - f,$$
$$KN = SN - SK.$$
$$SN = \frac{SI}{\sin L} = \frac{SL + LI}{\sin L},$$
$$SL = \frac{LK}{\cos L} = \frac{g - f}{\cos L}, \qquad LI = g - f,$$

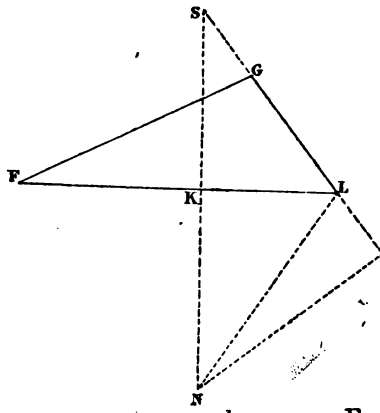
d'où
$$SN = \frac{g - f + (g - f) \cos L}{\sin L \cos L},$$
$$SK = (g - f) \operatorname{tang} L = \frac{(g - f) \sin L}{\cos L}.$$

Mais
$$\overline{LN}^2 = \overline{KL}^2 + \overline{KN}^2.$$

On a aussi
$$KN = SN - SK = \frac{g - f + (g - f) \sin^2 L}{\sin L \cos L},$$

ou bien
$$KN = \frac{g - f + (g - f) \cos L}{\sin L};$$

et
$$\overline{LN}^2 = \frac{1}{\sin^2 L} [(g - f + (g - f) \cos L)^2 + (f - g)^2 \sin^2 L)],$$



ou
$$\overline{LN}^2 = \frac{1}{\sin^2 L} [(g - f)^2 + 2(g - f)^2 \cos L + (f - g)^2 \cos^2 L + (f - g)^2 \sin^2 L],$$

ou enfin
$$(1) \quad \overline{LN}^2 = \frac{1}{\sin^2 L} [g^2 - 2fg + f^2 + 2(g^2 - 2fg + f^2) \cos L + f^2 - 2fg + g^2].$$

D'ailleurs,
$$l = g \cos F + f \cos G,$$
$$g = l \cos F + f \cos L,$$
$$f = l \cos G + g \cos L,$$
$$l^2 = f^2 + g^2 - 2fg \cos L.$$

Si l'on tient compte de ces relations, l'égalité (1) devient
$$\overline{LN}^2 = \frac{1}{\sin^2 L} [f^2 + g^2 + l^2 - 2fg \cos L - 2g(f - g \cos L) - 2f(g - f \cos L)]$$

ou
$$LN^2 = \frac{1}{\sin^2 L} [f^2 + g^2 + l^2 - 2fg \cos L - 2gl \cos F - 2fl \cos G].$$

C. Q. F. D.

QUESTION 295

Solution par M. A. Boutin.

Soient α, β, γ *trois circonférences deux à deux tangentes aux points* A, B, C (A désigne le point de contact de β et γ, etc.). *Les droites* CB, AB, *rencontrent* β *en des points* P *et* Q. *Démontrer que la droite* PQ *passe par le centre de* β *et qu'elle est parallèle à la ligne des centres des circonférences* α *et* γ.

Traçons $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, βP, βQ.

C étant un centre de similitude des circonférences α, β; βP est parallèle à αB. De même, A étant un centre de similitude des circonférences β, γ; βQ est parallèle à γB. Or les trois points α, B, γ sont en ligne droite; les trois points α, B, γ, sont en ligne droite; les trois points P, β, Q sont donc aussi en ligne droite.

QUESTION 296

Solution par M. A. Boutin.

Soient un triangle ABC *équilatéral, et une circonférence concentrique : tous les triangles dont les sommets sont les projections, sur les côtés* ABC, *d'un point mobile sur cette circonférence, ont même angle de Brocard.* (J. Neuberg.)

Soient O, le centre de ABC; M, un point de la circonférence considérée; α l'angle de OM avec le côté BC; γ le rayon du cercle inscrit à ABC; d le rayon OM; x, y, z, les distances de M aux trois côtés de ABC.

D'une manière générale, on sait que l'angle de Brocard est donné par la formule

$$\cot g\, \theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

On a donc, dans le cas présent,

$$\cot g\,\theta = \frac{\sum (x^2 + y^2 + 2xy \cos 60^\circ)}{2\sum xy \sin 60^\circ} = \frac{\sum x^2 + \frac{1}{2}\sum xy}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sum xy}.$$

D'ailleurs :

$$x = r + d \sin \alpha,$$
$$y = r - d \cos (30^\circ - \alpha),$$
$$z = r + d \sin (60^\circ - \alpha).$$

On en tire

$$\sum x^2 = 3r^2 + d^2, \qquad \sum xy = 3r^2 - \frac{3}{4} d^2,$$

d'où

$$\cot g\,\theta = \sqrt{3} \cdot \frac{4r^2 + d^2}{4r^2 - d^2}.$$

Cette quantité est indépendante de α, le théorème est donc démontré.

Remarques. — On déduit encore, de ce qui précède, les propriétés suivantes :

1° La somme des carrés des distances du point M aux trois côtés de ABC, est constante ;

2° La surface du triangle qui a pour sommets les projections de M sur les côtés de ABC, est constante ;

3° La somme des carrés des côtés du même triangle est également constante.

QUESTION 297

Solution par M. A. Boutin.

Étant donnés, dans un même plan, deux triangles ABC, A'B'C', *trouver trois masses* α, β, γ, *telles que si on les applique, soit en* A, B, C, *soit en* A', B', C', *elles aient même centre de gravité.*

(J. Neuberg.)

Soient $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)(x'_1, y'_1)(x'_2, y'_2)(x'_3, y'_3)(x, y)$ les coordonnées des points A, B, C, A', B', C', et du centre de gra-

vité commun des masses, par rapport à deux axes rectangulaires OX, OY, dans le plan. Les équations du problème sont :

$$x(\alpha + \beta + \gamma) = x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = x'_1\alpha + x'_2\beta + x'_3\gamma,$$
$$y(\alpha + \beta + \gamma) = y_1\alpha + y_2\beta + y_3\gamma = y'_1\alpha + y'_2\beta + y'_3\gamma.$$

En posant, pour abréger,

$$D = \begin{vmatrix} x_3 - x'_3, & x_2 - x'_2 \\ y_3 - y'_3, & y_2 - y'_2 \end{vmatrix},$$
$$D' = \begin{vmatrix} x_1 - x'_1, & x_3 - x'_3 \\ y_1 - y'_1, & y_3 - y'_3 \end{vmatrix},$$
$$D'' = \begin{vmatrix} x_2 - x'_2, & x_1 - x'_1 \\ y_2 - y'_2, & y_1 - y'_1 \end{vmatrix};$$

on a
$$\frac{\alpha}{D} = \frac{\beta}{D'} = \frac{\gamma}{D''},$$
et
$$x = \frac{x_1 D + x_2 D' + x_3 D''}{D + D' + D''}, \qquad y = \frac{y_1 D + y_2 D' + y_3 D''}{D + D' + D''}.$$

QUESTION 298

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Si deux triangles sont symétriques par rapport à un point, les transversales réciproques des côtés de l'un, par rapport à l'autre, sont concourantes. (d'Ocagne.)

Soient ABC, A'B'C' les deux triangles symétriques considérés. La transversale réciproque de A'C', par rapport à ABC, est parallèle à AC et l'on voit sans peine qu'elle coupe la droite C'C″, qui joint C' au point C″, milieu de AB, en un point ω symétrique de C', par rapport à C″. Ce point C″ étant le centre d'homothétie des triangles A'B'C', A″B″C″, on voit que les trois transversales considérées concourent au même point.

Nota. — Autre solution par M. A. Boutin.

QUESTION 299

Solution par M. A. Boutin.

Par un point M *du plan du triangle* BC, *mener les deux transversales réciproques qui passent par ce point. Dans quelles régions du plan doit se trouver* M *pour que la solution soit réelle.*

Prenons pour axes des x et des y, les côtés AB, AC.

Soient α, β les coordonnées de M; p, q les coordonnées à l'origine d'une des transversales, celles de sa réciproque sont $c - p$, $b - q$. On a

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1,$$

$$\frac{\alpha}{c-p} + \frac{\beta}{b-q} = 1.$$

Ces équations déterminent les inconnues p, q.

La première donne

$$q = \frac{\beta p}{p - \alpha};$$

et l'on a

$$p^2(2\beta - b) - cp(2\beta - b) + \alpha(\alpha b + c\beta - bc) = 0.$$

Cette équation, bien que du second degré, ne donne qu'un couple de transversales répondant à la question. En effet, la somme de ses racines étant c, si l'une des racines est p', l'autre est $c - p'$; par suite, les deux valeurs de p représentent l'abscisse à l'origine de l'une des transversales, et l'abscisse de la réciproque.

Pour que le problème soit possible, il faut que les valeurs de p soient réelles, ce qui exige que l'on ait

$$c^2(2\beta - b)^2 - 4\alpha(2\beta - b)(\alpha b + c\beta - bc) > 0,$$

ou

$$\left(\frac{b}{2} - y\right)\left(\frac{c}{2} - x\right)\left(1 - \frac{y}{\frac{b}{2}} - \frac{x}{\frac{c}{2}}\right) > 0.$$

Ainsi M ne doit être situé ni à l'intérieur du triangle qui a

pour sommets les milieux des côtés de ABC, ni dans les régions opposées, par le sommet, à l'intérieur de ce triangle.

En particulier, si M est situé sur un des côtés du triangle qui a pour sommets les milieux de ABC, le côté sur lequel M se trouve répond à la question ; ce côté est, en effet, à lui-même, sa transversale réciproque.

QUESTION 301

Solution par M. A. Boutin.

On donne les deux relations

$$\begin{vmatrix} a & a' & x \\ b & b' & y \\ c & c' & z \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & a' & x' \\ b & b' & y' \\ c & c' & z' \end{vmatrix} = 0;$$

on propose d'en déduire les suivantes

$$\begin{vmatrix} a & x & x' \\ b & y & y' \\ c & z & z' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a' & x & x' \\ b' & y & y' \\ c' & z & z' \end{vmatrix} = 0.$$

(Ch. Hermite.)

Les deux premières relations donnent

$$\begin{vmatrix} c & b \\ z & y \end{vmatrix} a' + \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} b' + \begin{vmatrix} b & a \\ y & x \end{vmatrix} c' = 0,$$

$$\begin{vmatrix} c & b \\ z' & y' \end{vmatrix} a' + \begin{vmatrix} a & c \\ x' & z' \end{vmatrix} b' + \begin{vmatrix} b & a \\ y' & x' \end{vmatrix} c' = 0.$$

En éliminant a' il vient

$$\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ z & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & b \\ z' & y' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} b' + \begin{vmatrix} b & a \\ y & x \end{vmatrix} c'}{\begin{vmatrix} a & c \\ x' & z' \end{vmatrix} b' + \begin{vmatrix} b & a \\ y' & x' \end{vmatrix} c'};$$

ou

$$b'\left[\begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} z' & x' \\ c & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z & x \\ c & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y' & z' \\ b & c \end{vmatrix}\right]$$

$$c'\left[\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y' & z' \\ b & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x' & y' \\ a & b \end{vmatrix}\right]$$

ou encore $$\begin{vmatrix} b' & c' \\ b & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & x & x' \\ b & y & y' \\ c & z & z' \end{vmatrix} = 0,$$

ou, enfin, $$\begin{vmatrix} a & x & x' \\ b & y & y' \\ c & z & z' \end{vmatrix} = 0.$$

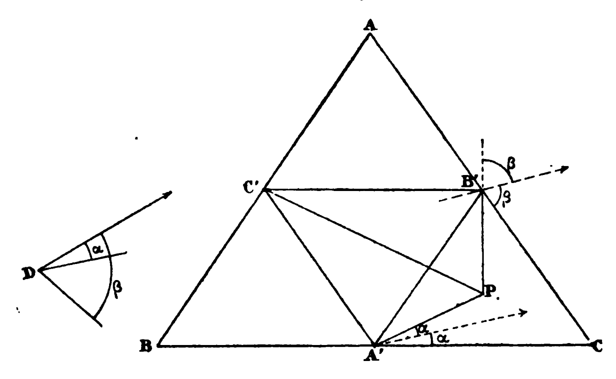
La seconde relation se démontre par un calcul analogue.

QUESTION 305

Solution par M. Marcel Vazou, professeur au Collège de Saulieu.

Par les milieux A', B', C' *des côtés d'un triangle quelconque* ABC, *on mène les symétriques de* BC, CA, AB *par rapport à une direction donnée. Ces trois droites concourent en un point du cercle des neuf points du triangle* ABC.

Soit une droite D faisant avec les côtés BC et CA du triangle des angles que je désignerai par α, β, ces angles étant du reste



comptés dans le même sens de rotation. Soient A'P, B'P les symétriques des côtés BC, AC, par rapport à la direction D, il s'agit de démontrer que ce point appartient au cercle A'B'C'.

En effet, on a

$$\widehat{PB'A'} = A - (\pi - 2\beta), \qquad \widehat{PA'B'} = B - 2\alpha, \qquad \beta = \alpha + C.$$

Donc $$A'PB' + C = \pi.$$

Ainsi la circonférence des neuf points passe par le point P.

La droite menée par C′, et qui est symétrique de AB par rapport à la direction donnée, devant, d'après le raisonnement précédent, couper chacune des droites A′P, B′P sur la circonférence A′B′C′, on voit que ces droites concourent sur cette circonférence.

NOTA. — Solutions diverses par MM. Svéchnicoff, professeur au gymnase de Troïtzk; A. Boutin; B. Sollertinsky, à Gatschina.

QUESTION 307

Solution par M. IGNACIO BEYENS, capitaine du Génie, à Cadix.

Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-b-c+a}=0$$

et vérifier qu'elle a toutes ses racines réelles. (G. L.)

L'équation proposée peut être écrite ainsi :

$$\frac{2x-b-c}{(x-a)(x-b-c+a)}=-\frac{2x-b-c}{(x-b)(x-c)}.$$

Une racine est donc égale à $\frac{b+c}{2}$; les autres correspondent à l'équation :

$$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b-c+a)=0,$$

$$x^2-(b+c)x+bc+x^2-(b+c)x+a(b+c-a)=0$$

$$(1) \quad 2x^2-2(b+c)x+a(b+c-a)+bc=0.$$

Le *discriminant* du premier membre (*), changé de signe, est

$$(b+c)^2-2bc-2a(b+c-a)\equiv(b-a)^2+(c-a)^2.$$

Les racines de l'équation (1) sont donc toujours réelles.

NOTA. — Solutions diverses par MM. Sollertinsky, à Gatschina; A. Boutin; Svéchnicoff, professeur au Gymnase de Troïtzk; Vazou, professeur au collège de Saulieu.

(*) Le discriminant de la forme $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ est $AC-B^2$; le signe de cette quantité décide de la réalité des racines de l'équation

$$Ax^2+2Bx+C=0.$$

Ce terme pourrait être introduit dans l'enseignement élémentaire pour être substitué à la périphrase ordinaire *quantité soumise au radical;* ou à certains néologismes qui ont été proposés mais dont l'introduction ne paraît pas nécessaire, puisque le mot *discriminant* existe déjà.

QUESTIONS PROPOSÉES

364. — On donne un cercle, une corde fixe AB et une corde variable CD de longueur constante. On joint AC, BD qui se coupent en S puis AD, BC qui se coupent en T. Trouver le lieu décrit par le point d'intersection de la droite ST avec la perpendiculaire élevée au milieu de CD, quand la corde CD se déplace. *(M. Fouché.)*

365. — On donne un angle quelconque BAC et un point fixe P dans son plan. Par ce point, on mène une transversale quelconque BPC;

1° Donner le lieu du point de rencontre de la circonférence circonscrite au triangle ABC avec la droite MB', obtenue en joignant le milieu M de BC au second point de rencontre B' de la parallèle à AC, menée par B, avec cette circonférence. Ce lieu est un cercle dont nous désignerons le centre par ω.

2° Démontrer que la droite B'M passe par un point fixe;

3° Démontrer que si le point P décrit une droite, le centre ω décrit une droite. Si le point P décrit une circonférence ayant son centre au sommet de l'angle donné, que l'on suppose droit, le point ω décrit une ellipse. *(E. Lauvernay.)*

Nota. — Nous avons reçu de M. Bénezech une solution de la question 304 que nous avons oublié de mentionner dans le précédent numéro.

Erratum. — Question 358 (p. 95, l. 12) *au lieu de* FBM, *lisez* FBC.

Le Directeur-gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8844-4-90.

PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Par M. **Louis Bénezech.**

(*Suite et fin*, voir p. 97.)

9. — Nous terminerons cet article en établissant quelques relations existant entre l'aire $\mathcal{S}$ du triangle et les aires T_a, T_b, T_c des triangles podaires correspondant aux centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits.

Des formules connues : $\gamma = 2R\frac{T}{S}$, $\gamma_a = 2R\frac{T_a}{S}$, etc. (*) dans lesquelles S désigne l'aire du triangle, on déduit :

$$\frac{T}{\gamma} = \frac{T_a}{\gamma_a} = \frac{T_b}{\gamma_b} = \frac{T_c}{\gamma_c} = \frac{S}{2R}.$$

Ainsi, toute relation homogène en γ, γ_a ... R, donnera une relation correspondante pour les quantités T, T_a ... S.

Appliquons cette remarque aux principales relations dans lesquelles entrent les quantités r, r_a, ... R.

I. — La relation $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_a} + \frac{1}{\gamma_b} + \frac{1}{\gamma_c}$ donne : $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} + \frac{1}{T_c}$.

Cette relation peut s'écrire ainsi :

$$\frac{\gamma^m}{\gamma^{m+1}} = \frac{\gamma_a^m}{\gamma_a^{m+1}} + \frac{\gamma_b^m}{\gamma_b^{m+1}} + \frac{\gamma_c^m}{\gamma_c^{m+1}};$$

d'où :

$$1^\circ \quad \frac{T^m}{\gamma^{m+1}} = \frac{T_a^m}{\gamma_a^{m+1}} + \frac{T_b^m}{\gamma_b^{m+1}} + \frac{T_c^m}{\gamma_c^{m+1}} \text{ (**)};$$

$$2^\circ \quad \frac{\gamma^m}{T^{m+1}} = \frac{\gamma_a^m}{T_a^{m+1}} + \frac{\gamma_b^m}{T_b^{m+1}} + \frac{\gamma_c^m}{T_c^{m+1}}.$$

II. — La relation $\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c = 4R + \gamma$ donne :

$$T_a + T_b + T_c = 2S + T.$$

(*) Elles résultent de la formule générale : $P = 4R^2\frac{S'}{S}$, dans laquelle S' et R sont la surface du triangle et le rayon du cercle circonscrit, S' et P la surface du triangle podaire d'un point quelconque du plan et la valeur absolue de la puissance de ce point par rapport au cercle circonscrit.

(**) Pour $m = 1$, il vient : $\frac{T}{\gamma^2} = \frac{T_a}{\gamma_a^2} + \frac{T_b}{\gamma_b^2} + \frac{T_c}{\gamma_c^2}$, relation donnée par M. Boutin. *J. E. Exercices divers. Question 130.*

On peut écrire :

$$\frac{\gamma_a^{m+1}}{\gamma_a^m} + \frac{\gamma_b^{m+1}}{\gamma_b^m} + \frac{\gamma_c^{m+1}}{\gamma_c^m} = 2\,\frac{(2R)^{m+1}}{(2R)^m} + \frac{\gamma^{m+1}}{\gamma^m};$$

d'où

$$1^\circ \qquad \frac{T_a^{m+1}}{\gamma_a^m} + \frac{T_b^{m+1}}{\gamma_b^m} + \frac{T_c^{m+1}}{\gamma_c^m} = \frac{S^{m+1}}{2^{m-1}R^m} + \frac{T^{m+1}}{\gamma^m},$$

$$2^\circ \qquad \frac{\gamma_a^{m+1}}{T_a^m} + \frac{\gamma_b^{m+1}}{T_b^m} + \frac{\gamma_c^{m+1}}{T_c^m} = \frac{2^{m+2}R^{m+1}}{\mathfrak{S}^m} + \frac{\gamma^{m+1}}{T^m}.$$

III. — La formule connue

$$4R = \frac{(\gamma_a + \gamma_b)(\gamma_b + \gamma_c)(\gamma_c + \gamma_a)}{\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_c + \gamma_c\gamma_a}$$

se transforme en :

$$2\mathfrak{S} = \frac{(T_a + T_b)(T_b + T_c)(T_c + T_a)}{T_aT_b + T_bT_c + T_cT_a}$$

qui donne l'expression de l'aire du triangle en fonction des triangles podaires des centres des cercles ex-inscrits.

IV. — Nous avons vu, théorème I, que les relations

$$\gamma_a = \gamma + \gamma_b + \gamma_c, \quad \gamma_b + \gamma_c = 2R, \quad \gamma_a - \gamma = 2R,$$

caractérisent un triangle, rectangle en A. Par conséquent, il en sera de même des relations :

$$T_a = T + T_b + T_c, \quad T_b + T_c = S, \quad T_a - T = S,$$

et, plus généralement, on pourra énoncer ce théorème :

Théorème XVII. — *Dans tout triangle, rectangle en A :*

$$\frac{T_a^{m+1}}{\gamma_a^m} = \frac{T^{m+1}}{\gamma^m} + \frac{T_b^{m+1}}{\gamma_b^m} + \frac{T_c^{m+1}}{\gamma_c^m}, \quad \frac{T_b^{m+1}}{\gamma_b^m} + \frac{T_c^{m+1}}{\gamma_c^m} = \frac{S^{m+1}}{2^m.R^m},$$

$$\frac{T_a^{m+1}}{\gamma_a^m} - \frac{T^{m+1}}{\gamma^m} = \frac{S^{m+1}}{2^m.R^m},$$

$$\frac{\gamma_a^{m+1}}{T_a^m} = \frac{\gamma^{m+1}}{T^m} + \frac{\gamma_b^{m+1}}{T_b^m} + \frac{\gamma_c^{m+1}}{T_c^m}, \quad \frac{\gamma_b^{m+1}}{T_b^m} + \frac{\gamma_c^{m+1}}{T_c^m} = \frac{2^{m+1}.R^{m+1}}{S^m},$$

$$\frac{\gamma_a^{m+1}}{T_a^m} - \frac{\gamma^{m+1}}{T^m} = \frac{2^{m+1}.R^{m+1}}{S^m}.$$

Réciproquement, si l'une quelconque de ces relations est vérifiée, le triangle est rectangle en A.

SUR LE CENTRE DES DISTANCES PROPORTIONNELLES

Par M. **L. Bénezech.**

Nous nous proposons, dans cet article, de réunir certains théorèmes généraux se rattachant à la théorie du centre des distances proportionnelles, et de montrer, ensuite, par quelques applications, tout le parti qu'on peut tirer de cette théorie.

1. — Soient $A_1, A_2 \ldots A_n$, n points quelconques, affectés, respectivement, des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; O, leur centre des distances proportionnelles; $p_1, p_2, \ldots p_n$; ρ, les longueurs algébriques des projetantes (orthogonales ou obliques) des points $A_1, A_2, \ldots A_n$; O, sur un plan P. D'après le théorème fondamental, bien connu, on a :

$$(1) \quad \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\rho.$$

Nous considérons comme positives les projetantes des points situés du même côté que le point O, par rapport au plan P; de plus, nous supposons ces projetantes orthogonales. Dans ces conditions, la relation (1) conduit immédiatement aux propositions suivantes :

Théorème I. — *Pour tout plan tangent à la sphère décrite de O comme centre, avec ρ pour rayon, la somme $\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n$ conserve une valeur constante $\rho(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$.*

Corollaire. — *Pour tout plan passant par le centre des distances proportionnelles, la somme $\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n$ est nulle.*

Théorème II. — *L'enveloppe des plans pour lesquels la somme $\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n$ est égale à une constante K, est une sphère de rayon $\dfrac{K}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$, dont le centre coïncide avec le centre des distances proportionnelles.*

Corollaire. — *Les plans pour lesquels la somme $\alpha_1 p_1 + \ldots \alpha_n p_n$ est nulle, passent par le centre des distances proportionnelles.*

REMARQUE. — Tout ce qui vient d'être dit est vrai, quelle que soit la situation des points A_1, A_2 ... A_n. Lorsque ces points sont situés dans un même plan, si l'on remplace les mots *plan* et *sphère* par ceux-ci, *droite* et *cercle*, ce qui précède est encore exact.

2. — Soit M un point quelconque de l'espace; supposons que le plan P coïncide avec le plan, mené par O, perpendiculairement à OM. On a :

$$\overline{MA}_1^2 = \overline{OA}_1^2 + \overline{MO}^2 - 2MO.p_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{MA}_n^2 = \overline{OA}_n^2 + \overline{MO}^2 - 2MOp_n,$$

d'où

(2) $$\alpha_1\overline{MA}_1^2+\ldots+\alpha_n\overline{MA}_n^2=\alpha_1\overline{OA}_1^2+\ldots+\alpha_n\overline{OA}_n^2+\overline{MO}^2(\alpha_1+\ldots+\alpha_n).$$

Car $\alpha_1 p_1 + \ldots \alpha_n p_n$ est nul, d'après le corollaire du théorème I.

De la relation (2), résultent les théorèmes qui suivent :

Théorème III. — *Le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés de leurs distances à* n *points* A_1, A_2 ... A_n, *multipliées respectivement par les coefficients* α_1, α_2, ... α_n *soit égale à une constante* K^2, *est une sphère ayant pour centre le centre des distances proportionnelles des points considérés et pour longueur du rayon,* $\sqrt{\dfrac{K^2 - \alpha_1.\overline{OA}_1^2 - \ldots - \alpha_n.\overline{OA}_n^2}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}$.

Théorème IV. — *Étant donnés deux systèmes de points affectés de coefficients quelconques, le lieu géométrique des points* M *tels que la somme des carrés de leurs distances aux points du premier système, multipliées par les coefficients correspondants, soit égale à la somme analogue, relative au second système, est une sphère dont le centre est situé sur la droite qui joint les centres des distances proportionnelles des deux systèmes de points.*

En effet, en appliquant la relation (2), à deux systèmes de points dont les centres des distances proportionnelles sont O, O'; on voit que l'on a

$$K\overline{MO}^2 - K'\overline{MO'}^2 = K',$$

K, K', K'' désignant des constantes. De cette relation et du théorème précédent, on déduit le théorème en question.

Corollaire. — *Lorsque la somme des coefficients est la même pour chaque système, le lieu se réduit à un plan perpendiculaire à la droite qui joint les centres des distances proportionnelles des deux systèmes de points.*

Il suffit d'observer que, dans l'égalité précédente on a $K=K'$.

Théorème V. — *Étant donnés trois systèmes de points affectés de coefficients quelconques; le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux points de l'un quelconque des systèmes, multipliées par les coefficients correspondants, soit la même pour chaque système, est un cercle dont le plan est perpendiculaire au plan des centres des distances proportionnelles des trois systèmes de points, et dont le centre est situé dans ce plan.*

Corollaire. — *Lorsque la somme des coefficients est la même pour chaque système, le lieu se réduit à une droite perpendiculaire au plan des centres des distances proportionnelles.*

Théorème VI. — *Étant donnés quatre systèmes de points affectés de coefficients quelconques; on peut, en général, déterminer deux points tels que pour chacun d'eux la somme des carrés de ses distances aux points de l'un quelconque des systèmes, multiplies par les coefficients correspondants, soit la même pour chaque système de points.*

Corollaire. — *Lorsque la somme des coefficients est la même pour chaque système, il ne peut exister qu'un seul point jouissant de la propriété en question.*

Remarque. — On trouverait de même, pour le plan, des théorèmes analogues aux précédents.

3. — Applications de la formule (1).

Soient le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, un point O qui n'est pas situé sur les faces, et un plan. Affectons le sommet A_1 d'un coefficient égal au volume de la pyramide $(OA_2A_3A_4)$, ce volume étant pris avec le signe + ou le signe —, suivant que les points O et A_1 sont d'un même côté ou de côtés différents par rapport au plan $A_2A_3A_4$; et attribuons aux autres sommets des coefficients déterminés d'une manière analogue.

Dans ces conditions, le point O est le centre des distances

proportionnelles des sommets du tétraèdre. On a donc, d'après (1),

$$(\mathrm{OA_2A_3A_4})p_1 + (\mathrm{OA_3A_4A_1})p_2 + (\mathrm{OA_4A_1A_2})p_3 + (\mathrm{OA_1A_2A_3})p_4 = \rho(\mathrm{A_1A_2A_3A_4})$$

ou bien, en désignant par s_1, s_2, s_3, s_4 les aires des faces opposées aux sommets $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{A_4}$, et par q_1, q_2, q_3, q_4 les distances algébriques du point O à ces faces,

$$s_1q_1p_1 + s_2q_2p_2 + s_3q_3p_3 + s_4q_4p_4 = \rho(s_1q_1 + s_2q_2 + s_3q_3 + s_4q_4).$$

relation qui peut être mise sous la forme suivante

$$(3) \quad s_1q_1(p_1-\rho) + s_2q_2(p_2-\rho) + s_3q_3(p_3-\rho) + s_4q_4(p_4-\rho) = 0.$$

On prouverait sans difficulté que, si la relation (4) est vraie pour un polyèdre formé par $2n$ faces triangulaires, elle est encore vraie pour un polyèdre formé par $2n + 2$ faces triangulaires. On peut donc énoncer cette proposition :

Théorème. — *Étant donnés : un polyèdre convexe à faces triangulaires, un point* O *qui n'est pas sur la surface, et un plan* P*; si l'on désigne par* s_k *l'aire de l'une des faces du polyèdre, par* q_k *la distance algébrique du point* O *à cette face et par* ρ, p'_k, p''_k, p'''_k *les longueurs algébriques des projetantes, sur le plan* P, *du point* O *et des sommets de la face considérée; on a :*

$$\sum s_kq_k(p_k - \rho) = 0,$$

le signe $\sum$ *s'étendant à toutes les faces du polyèdre.*

On démontrerait, de la même manière, le théorème analogue du plan; et, en supposant que l'axe de projection passe par le centre des distances proportionnelles et que les projetantes, sur cette droite, soient orthogonales, on retrouve un théorème signalé par M. Lauvernay (*Journal*, p. 52).

Remarque. — Revenons à la relation

$$(3) \quad s_1q_1(p_1-\rho) + s_2q_2(p_2-\rho) + s_3q_3(p_3-\rho) + s_4q_4(p_4-\rho) = 0.$$

Supposons que les projetantes, sur le plan P, soient orthogonales, et convenons de considérer la projetante du point O comme positive. Si l'on écrit les équations analogues à (3) relatives à trois autres plans tangents à la sphère décrite de O comme centre, avec ρ pour rayon et que l'on élimine s_1q_1, s_2q_2, s_3q_3, s_4q_4 entre ces quatre équations, on obtient entre les distances de quatre points de l'espace à quatre plans tangents à une même sphère de rayon ρ, la relation

$$(4) \quad \sum \frac{s_1q_1}{(p'_k-\rho)(p''_k-\rho)(p'''_k-\rho)} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \rho \\ p_1' & p_2' & p_3' & p_4' & \rho \\ p_1'' & p_2'' & p_3'' & p_4'' & \rho \\ p_1''' & p_2''' & p_3''' & p_4''' & \rho \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$p_1 p_2 p_3 p_4, p_1' p_2' \ldots, p_1'' \ldots, p_1''' \ldots, p_4'''$ désignant les distances algébriques des sommets du tétraèdre aux quatre plans tangents considérés.

En faisant $\rho = 0$ dans l'égalité précédente, on a

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1' & p_2' & p_3' & p_4' \\ p_1'' & p_2'' & p_3'' & p_4'' \\ p_1''' & p_2''' & p_3''' & p_4''' \end{vmatrix} = 0,$$

relation entre les distances de quatre points de l'espace à quatre plans passant par un même point.

On a des relations analogues 1° entre les distances de trois points d'un plan à trois tangentes à un même cercle, 2° entre les distances de trois points à trois droites concourantes.

(A suivre.)

ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Auguste Morel.**

(*Suite*, voir p. 102.)

II. — *La Parabole.*

38. — Après avoir donné quelques-unes des propriétés des sections coniques en général, nous allons étudier chacune de ces courbes en particulier; mais auparavant nous devons définir quelques termes qui reviendront fréquemment.

Si, d'un point M d'une courbe, nous abaissons une perpendiculaire MN sur l'axe, la distance du pied N de cette perpendiculaire au sommet s'appelle, nous l'avons dit plus haut, l'*abscisse* du point; MN est l'*ordonnée* du point.

Si nous considérons un diamètre quelconque, rencontrant

la courbe en H, et que par le point M nous menions une parallèle MP aux cordes que le diamètre partage en deux parties égales, HP et MP sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M, *relatives au diamètre considéré.*

Le *paramètre* correspondant à un diamètre est la corde focale divisée en deux parties égales par le diamètre. Dans le cas de l'axe, le paramètre est la corde perpendiculaire à l'axe menée par le foyer.

La *sous-tangente* est la partie de l'axe comprise entre le point où cet axe rencontre la tangente, et l'ordonnée du point de contact. La *sous-normale* est la portion de l'axe comprise entre le point où il rencontre la normale et l'ordonnée du pied de la normale.

Dans le cas d'un diamètre quelconque, la sous-tangente correspondant à ce diamètre est la portion du diamètre comprise entre la tangente et l'ordonnée correspondant au diamètre.

39. — La PARABOLE est la section conique dont l'excentricité est égale à l'unité.

Les propriétés qui ont été démontrées pour les sections coniques en général, s'appliquent évidemment aux coniques particulières. Mais la réciproque n'est pas exacte; et il y a lieu de rechercher, pour celles-ci, les propriétés qui leur appartiennent en propre; il y a lieu aussi de voir comment se modifient, quelquefois profondément, les énoncés des théorèmes généraux, quand on envisage leur application à ces coniques particulières.

40. Théorème. — *La normale à la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur et la parallèle à l'axe qui passe par le pied de la normale.*

Soit M le pied de la normale MG; cette droite rencontre au point G l'axe de la parabole; le rapport de FG à FM est égal à l'excentricité. Donc, dans le cas de la parabole, la ligne FG est égale à FM. Il en résulte que l'angle FMG est égal à l'angle FGM et, par suite, à l'angle GMN que fait la droite GM avec la parallèle MN à l'axe.

41. Corollaire I. — *La tangente à la parabole fait des*

angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et la parallèle à l'axe, menée par le point de contact.

En effet, la tangente étant perpendiculaire à la normale, est la seconde bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur et la parallèle à l'axe, menée par le point de contact.

42. Corollaire II. — Du point de contact M, abaissons la perpendiculaire M*m* sur la directrice. Il résulte, de la définition de la parabole, que la ligne M*m* est égale à MF. Donc le triangle MF*m* est isoscèle, et la droite MT, bissectrice de l'angle *m*MF, est perpendiculaire sur *m*F en son milieu. Il en résulte encore que le point *m* est le symétrique du foyer par rapport à la tangente MT. Donc *le lieu géométrique des symétriques du foyer par rapport aux tangentes, est la directrice.*

43. Corollaire III. — Soit I le point où la droite F*m* rencontre la tangente; c'est la projection du foyer sur la tangente. Mais en outre, le point I est le milieu de F*m*. Ainsi, le lieu du point I est une parallèle à la directrice; elle passe par le point A, milieu de FX, c'est-à-dire par le sommet, et elle se confond avec la tangente au point A. Donc *le lieu géométrique des projections du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet.*

44. Théorème. — *Si, d'un point* Q, *on mène deux tangentes* QP *et* QP′ *à une parabole, les triangles* FPQ, FP′Q *sont semblables, et* FQ *est moyen proportionnel entre* FP *et* FP′.

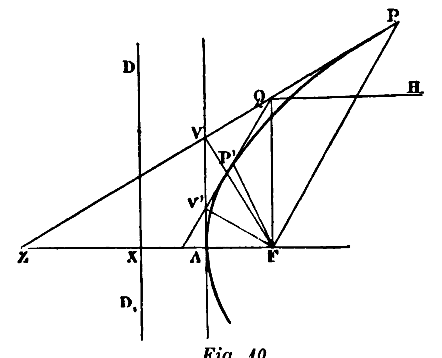


Fig. 10.

Prolongeons la tangente PQ jusqu'à sa rencontre en Z avec l'axe; alors FPQ = FZQ, d'après le théorème précédent.

La tangente PQ et la tangente P′Q rencontrent en V et V′ la tangente au sommet, d'après le 3[e] corollaire précédent, FV

et FV′ sont, respectivement, perpendiculaires à PQ et à P′Q; donc, FVA = FZQ. D'autre part, les quatre points Q, V, V′, F étant sur la circonférence qui a FQ pour diamètre, nous avons

$$FVA = FQV'.$$

Par suite $$FPQ = FQP'.$$

Si l'on observe que QFP = QFP′, on voit que les deux triangles sont semblables, et l'on a

$$\frac{FQ}{FP} = \frac{FP'}{FQ}.$$

45. Corollaire. — Traçons, par le point Q, les deux tangentes QP, QP′, puis la droite QF et la parallèle QH à l'axe. D'après le théorème précédent, on a FQP′ = FPQ; et, d'autre part, FPQ = PQH. Donc, *si par le point* Q, *on mène deux tangentes, l'angle que fait l'une d'elles avec le rayon vecteur du point* Q, *est égal à l'angle que fait l'autre avec la parallèle à l'axe, menée pr le point* Q.

46. Théorème. — *Si, par un point* Q, *pris sur une tangente fixe* PQ, *on mène la seconde tangente* QP′ *et la droite* QF, *l'angle* FQP′ *est indépendant de la position du point* Q *sur la tangente fixe.*

En effet, cet angle est toujours égal à l'angle FPQ que fait la tangente fixe avec le rayon vecteur du point de contact.

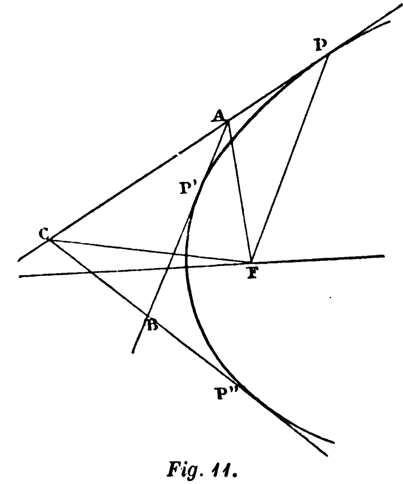


Fig. 11.

47. Théorème. — *La circonférence, circonscrite au triangle formé par trois tangentes à la parabole, passe par le foyer.*

Soient les trois tangentes PA, P′B, P″C. Joignons le point F au point de contact P de la première et aux points A, C, où elle rencontre les deux autres. D'après

le théorème précédent,

$$FAB = FCB = FPA.$$

Donc les quatre points A, B, C, F sont sur une même circonférence.

48. Théorème. — *La partie d'un diamètre, comprise entre une tangente et l'ordonnée du point de contact par rapport à ce diamètre, est divisée en deux parties égales par la courbe.*

Soient la tangente MT, le diamètre TBN et l'ordonnée MN relative à ce diamètre. Si nous menons une tangente au point B, où le diamètre rencontre la courbe, cette tangente est parallèle à MN; elle rencontre MT au point C. La droite MB est la corde des contacts des tangentes issues du point C. Traçons, par le point B, une parallèle à MT jusqu'à sa rencontre avec MD.

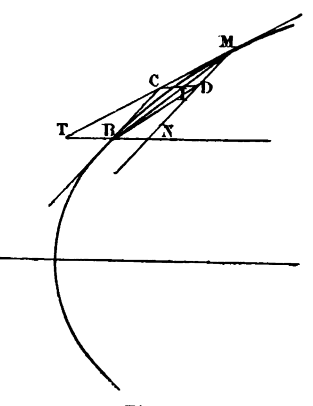


Fig. 12.

Alors, dans le parallélogramme MCBD, la diagonale CD passe au milieu de la diagonale MB. Donc CD est le diamètre correspondant à la direction MB; il est, par suite, parallèle à TBN.

Or, les trois lignes concourantes MT, MB, MN partagent les deux parallèles CD, TN, en parties proportionnelles; et puisque le point I est le milieu de CD, le point B est le milieu de TN.

49. Corollaire. — Si, en particulier, on considère l'axe de la courbe, l'ordonnée correspondant à cet axe est perpendiculaire à l'axe; la distance du sommet au pied de l'ordonnée est l'abscisse principale du point considéré, et la distance du pied de l'ordonnée au point de rencontre de la tangente et de l'axe est la sous-tangente. Donc

La sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact.

50. Théorème. — *Les tangentes aux extrémités d'une corde focale se coupent sur la directrice, et sont perpendiculaires l'une à l'autre.*

Considérons une corde focale CFB; par le point F, menons une perpendiculaire à CB, rencontrant la directrice en R. Traçons RB; on sait qu'elle est la tangente en B. De même CR est la tangente en C.

Abaissons, du point F, la perpendiculaire F*b* sur la tangente BR, jusqu'à la rencontre avec la directrice en *b*; *b* est le symétrique de F, par rapport à BR. Par suite, le triangle FR*b* est isoscèle, et BR est la bissectrice de l'angle FR*b*.

De même, CR est la bissectrice de l'angle FR*c*. Donc les deux tangentes BR et CR sont perpendiculaires entre elles.

51. Théorème. — *Le paramètre relatif à un diamètre est égal à quatre fois la distance du foyer à l'extrémité de ce diamètre.*

Soit une corde focale BFC; les tangentes en B et C se coupent en R; par le point R, je mène RD parallèle à l'axe; RD est un diamètre, et BC le paramètre correspondant.

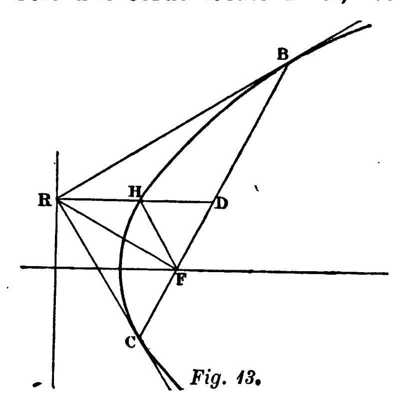


Fig. 13.

Puisque l'angle BRC est droit, la droite RD, qui passe par le milieu de l'hypoténuse BC, est égale à la moitié de cette hypoténuse.

De même, si l'on trace FR, l'angle DFR est droit; et comme l'extrémité H du diamètre est le milieu de RD, il en résulte que HF est la moitié de RD, ou le quart de BC.

52. Théorème. — *Dans la parabole, la sous-normale est constante, et égale au demi-paramètre principal.*

Soit la normale MG, et l'ordonnée MN du point M; traçons FM, et la droite M*m* perpendiculaire à la directrice.

On a $$Mm = NX = FX + NF.$$

D'autre part, on sait que le rapport de FG à FM est égal à l'excentricité; on a donc

$$FG = FM = Mm$$

En comparant ces égalités aux précédentes, il vient

$$NG = FX.$$

Ainsi NG est constant. Il est, du reste, évident que la corde focale perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire le paramètre principal, est double de FX.

53. Théorème. — *L'ordonnée principale d'un point est moyenne proportionnelle entre l'abscisse de ce point et le paramètre principal.*

Soient un point M, l'ordonnée principale MN, la tangente MT, et la normale MG. On sait que la sous-tangente TN est double de l'abscisse AN.

Cela posé, le triangle rectangle GMT donne

$$MN^2 = NT \times NG.$$

Or, NG est la moitié du paramètre; NT le double de l'abscisse, la proposition est donc démontrée.

54. Théorème. — *L'ordonnée relative à un diamètre est moyenne proportionnelle entre l'abscisse correspondante et le paramètre relatif à ce diamètre.*

Soit un point M. Traçons la corde MQ divisée en deux parties égales par le diamètre BH, et les tangentes en M et Q; elles se coupent en T, sur le diamètre BH.

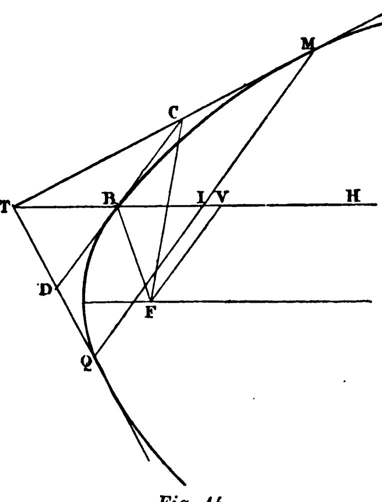


Fig. 14.

Menons la tangente à l'extrémité B du diamètre; elle est parallèle à MQ, et divisée en deux parties égales par les droites TM, TH et TQ.

Enfin, traçons FV parallèle à MQ, et rencontrant BH au point V; puis FB et FC.

Puisque BV est égal à BF, il en résulte que

$$BVF = BFV = FBD.$$

D'autre part, le point C étant sur la tangente fixe CD, et CT étant une tangente, nous avons

$$FCT = FBD.$$

Donc le point V est sur la circonférence TCF, qui passe aussi par le point D. L'égalité CB = AD donne, par suite,

$$CB^2 = BT \times BV.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par 4, nous avons

$$4CB^2 = BT \times 4BF.$$

Mais CB est la moitié de MI ; 4BF est le paramètre relatif au diamètre BH; BT est égal à l'abscisse BI. Donc, en posant $2p' = 4BF$, on a

$$MI^2 = 2p'.BI.$$

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin.**

(*Suite*, voir page 87.)

150. — A_1, B_1, C_1, étant les points de contact du cercle inscrit I à ABC avec les côtés de ce triangle, résoudre ABC connaissant les rayons r_1, r_2, r_3, des cercles inscrits aux quadrilatères AB_1C_1I, BA_1C_1I, CA_1IB_1.

On trouve, pour déterminer r_1, r_2, r_3, les formules (r rayon du cercle inscrit)

$$r_1 = \frac{r}{1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}} \cdots ;$$

d'où

(1) $$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r - r_1}{r_1} \cdots$$

On a $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1$$

d'où $$\frac{(r - r_1)(r - r_2)}{r_1r_2} + \frac{(r - r_1)(r - r_3)}{r_1r_3} + \frac{(r - r_2)(r - r_3)}{r_2r_3} = 1$$

$$r^2(r_1 + r_2 + r_3) - 2r(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) + 2r_1r_2r_3 = 0.$$

Cette équation détermine r; ensuite les formules (1) donnent les angles.

151. — Soit R le rayon du cercle circonscrit à un triangle ABC; soit r le rayon du cercle inscrit. Il y a une infinité de triangles qui ont R et r communs. Trouver le lieu géométrique : 1° du centre du cercle des neuf points O′ de tous ces triangles; 2° de leur point de Nagel N; 3° de leur orthocentre H; 4° de leur centre de gravité.

1° et 2°. On a:
$$O'I = \frac{1}{2}(R - 2r)$$
$$NO = R - 2r$$
donc O′ décrit un cercle concentrique à I, N un cercle de rayon double du précédent et concentrique à O.

3° O, O′, H sont en ligne droite et OH = 2OO′; donc H décrit un cercle homothétique à celui décrit par O′, le centre d'homothétie étant O, et le rapport d'homothétie 2.

4° G est le point de concours de HO et de NI, et partage ces droites dans le rapport de 2 à 1. Donc G décrit également un cercle homothétique à celui décrit par H, ou à celui décrit par N; suivant que O ou I seront considérés comme centres d'homothétie; dans les deux cas, le rapport d'homothétie est $\frac{1}{3}$.

152. — A, B, C étant les angles d'un triangle, si on a les relations
$$\frac{\alpha}{\cos A \sin^2 \frac{A}{2} (\cos C - \cos B)} = \frac{\beta}{\cos B \sin^2 \frac{B}{2} (\cos A - \cos C)}$$
$$= \frac{\alpha'}{\cos C - \cos B} = \frac{\beta'}{\cos A - \cos C} = \frac{\gamma'}{\cos B - \cos A}.$$
On a aussi:
$$\Sigma \sin A(\gamma\beta' - \beta\gamma') = 0.$$

153. — Calculer la distance du centre du cercle inscrit, au point de Lemoine.

On peut partir de la formule
$$\frac{1}{2}\delta^2\Sigma \sin^2 A = \Sigma(x - x_1)^2 + \Sigma \cos A(y - y_1)(z - z_1).$$
On trouve :
$$\delta^2 = \frac{2Rr^2(4R + r)}{S \cot g \theta} - 3R^2 \operatorname{tg}^2 \theta,$$
θ désignant l'angle de Brocard.

154 — Dans tout triangle, le point de Gergonne Γ, le point de Nagel ν, et les réciproques I_0, H_0 du centre du cercle inscrit et de l'orthocentre sont quatre points en ligne droite et l'on a :
$$\Gamma I_0 = 2H_0\nu.$$

155. — A'B'C' étant le triangle qui a pour sommets les centres des cercles de Malfatti de ABC, on a :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A'}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)^2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B'}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)^2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C'}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)^2}.$$

En effet, d'après les solutions connues du problème de Malfatti, on a :

$$a'=\frac{r}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)\left[\frac{1+\operatorname{tg}\frac{C}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{B}{4}}+\frac{1+\operatorname{tg}\frac{B}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{C}{4}}\right]$$

ou $\quad a' : \left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)^2\left[\left(1+\operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)^2+\left(1+\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)^2\right]=\ldots$

Si l'on pose, pour simplifier :

on a $\quad \alpha=\left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)^2\ldots$

$$\frac{a'}{\alpha(\beta+\gamma)}=\frac{b'}{\beta(\alpha+\gamma)}=\frac{c'}{\gamma(\alpha+\beta)}=\frac{p'}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}=\frac{p'-a'}{\beta\gamma}$$

d'où $\quad \operatorname{tg}\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{(p'-b')(p'-c')}{p'(p'-a')}}:\sqrt{\frac{\alpha\beta.\alpha\gamma}{\beta\gamma}}$

$$\operatorname{tg}\frac{A'}{2}:\alpha=\operatorname{tg}\frac{B'}{2}:\beta=\operatorname{tg}\frac{C'}{2}:\gamma.$$

156. — Vérifier l'identité :

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\frac{q^7}{1-q^7}+\cdots$$

$$\text{(A)}\qquad =\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots$$

q étant < 1, on peut développer, par la division, chacune des fractions du premier et du second membre. Le coefficient de q^p, fourni par chacune de ces fractions est 1 ; il suffit donc de compter combien de fractions peuvent donner ce terme.

Chaque fraction du premier membre qui donnera q^p le donnera une fois et une seule par diviseur impair de p. Donc, d'une manière générale, dans le développement du premier membre, le coefficient du terme dont l'exposant de q est $2^n a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ ($a, b, c\ldots$ étant des facteurs premiers différents de 2) est

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots$$

Si l'on développe de même le second membre, la première fraction donne une fois toutes les puissances impaires de q ; la seconde les puissances de q dont les exposants sont doubles de ceux de la première ; la troisième celles dont les exposants sont triples des exposants fournis par la première fraction, etc. Chaque puissance de q figurera donc dans le développement général du second membre autant de fois que son exposant

admet de diviseurs impairs, c'est-à-dire autant de fois que dans le premier membre.

Cette identité se trouve dans le *Traité des Fonctions elliptiques* de M. Briot.

Nota.— Comme le fait observer M. Catalan dans son Mémoire : *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries*, publié dans le tome XLV des *Mémoires de l'Académie roya'e des sciences de Belgique*, 1883, cette identité est remarquablement associée à celle qu'a donnée Jacobi (*Fundamenta*... p. 103).

(B)

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} \dots = \frac{q}{1+q^2} + \frac{q^2}{1+q^4} + \frac{q^3}{1+q^6} \dots$$

En ajoutant (A), (B) on a

$$\frac{q}{1-q} + \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^9}{1-q^9} \dots = \frac{q}{1-q^4} + \frac{q^2}{1-q^8} + \frac{q^3}{1-q^{12}} \dots$$

Pour vérifier cette identité, M. Catalan montre que le coefficient de q^n dans les deux membres est le nombre des diviseurs de n, ayant la forme $4\mu + 1$.

On trouvera, dans le mémoire cité, un grand nombre d'identités analogues à celles qui précèdent.

G. L.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

(Octobre, Novembre 1889.)

ACADÉMIE DE LYON

Première Série. — Résoudre l'équation

$$2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 30.$$

On aura soin d'indiquer parmi les racines trouvées celles qui conviennent réellement à la question.

On pose $2x^2 + 3x + 9 = y^2$

et on a $y^2 + y - 42 = 0$ (avec la condition $y > 0$).

Cette équation admet une seule solution positive $y = 6$.

Finalement, on a

$$x' = -3x'' = \frac{9}{2}.$$

Deuxième Série. — Dans un triangle rectiligne, on donne

$$A = 27^\circ 47' 44'',8.$$
$$a = 2199^{m},12.$$
$$b = 2513^{m},28.$$

TROISIÈME SÉRIE. — Calculer, à une seconde près, les valeurs de x qui vérifient l'équation

$$\sin 2x + \cos 2x + \frac{1}{5} = 0.$$

On observe que l'équation peut être écrite ainsi :

$$\sin (2x + 45) = -\frac{\sqrt{2}}{10} = -0,141421, \text{ etc.}$$

QUATRIÈME SÉRIE. — Un triangle rectangle engendre, en tournant autour de son hypoténuse, un volume égal aux $\frac{45}{100}$ de celui de la sphère qui aurait cette hypoténuse pour diamètre. On demande de calculer les angles de ce triangle et de dire si le même problème serait toujours possible, quelle que soit la fraction donnée qui représenterait le rapport des mêmes volumes.

CINQUIÈME SÉRIE. — Trouver le minimum de x^2, y^2, z^2 sachant que x, y, z vérifient la relation $ax + by + cz = d$.

Application numérique :

$$a = 2.25.$$
$$b = 3.45.$$
$$c = 4.75.$$
$$d = 5.33.$$

Posant
$$x^2 + y^2 + z^2 = t,$$
on a, par élimination de t,
$$x^2(a^2 + c^2) - 2ax\,(d - by) + y^4(c^2 + b^2) - 2bdy + c^2d^2 - ct = 0.$$
On doit avoir
$$a^2(d - by)^2 - (a^2 + c^2) \left\{ y^2(c^2 + b^2) - 2bdy + d^2c^2 - c^2t \right\} > 0$$
ou
$$y^2(a^2 + b^2 + c^2) - 2bdy + d^2 - t(a^2 + c^2) < 0.$$

Pour que cette inégalité puisse exister, il faut que l'équation en y, obtenue en égalant à zéro le premier membre, ait ses racines réelles. En effet, dans le cas contraire, le trinôme conserverait *quels que soient* t *et* y le signe du premier terme, c'est-à-dire le signe +. On a donc
$$b^2d^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \left\{ d^2 - t(ca^2 + c^2) \right\} \geqslant 0$$
ou
$$t \geqslant \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$
Le minimum a lieu pour
$$t = \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

SIXIÈME SÉRIE. — Dans le triangle ABC on donne

$$a = 23^{m},25$$
$$b + c = 27^{m}.$$
$$C - B = 7°30'10''.$$

On demande de calculer les angles et les côtés.

SEPTIÈME SÉRIE. — Deux angles diffèrent entre eux de 15 degrés 30 minutes. et leurs tangentes trigonométriques ont entre elles une différence de 0.73. On demande de calculer la valeur de ces angles. Le problème admet-il plusieurs solutions?

Les équations du problème sont :

$$x - y = \alpha, \qquad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \beta.$$

On en tire

$$2 \sin \alpha = 2 \beta \cos x \cos y = \beta[\cos \alpha - \cos (x + y)].$$

D'où
$$\cos (x + y) = \cos \alpha - \frac{2}{\beta} \sin \alpha.$$

On pose alors
$$\frac{2}{\beta} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ etc.}$$

ACADÉMIE DE LILLE

1° Résoudre et discuter l'équation :

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

a, b, c étant trois nombres donnés.

2° Calculer les côtés x, y de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant leur différence $2a$ et sachant que le périmètre est égal à $2b$.

SUR LA QUESTION 304 (*)

Généralisation et solution par M. BERNÈS, professeur au lycée Louis-le-Grand.

Étant donné un triangle ABC, *si d'une part on porte sur* BA, CA, *dans les deux sens à partir de* B *et* C, *une même longueur* l, ($BB' = BB'' = l, CC' = CC'' = l$)*; si, d'autre part,* D *et* D' *étant les milieux des arcs sous-tendus par* BC *dans la circonférence* O

(*) Voyez la solution insérée p. 91.

circonscrite à ABC, *on porte, sur la bissectrice* DA *de l'angle* A *dans les deux sens à partir de* D, *les longueurs* DI, DI_a *telles que leurs projections sur* AB *soient égales à* $\frac{l}{2}$, *et sur la bissectrice extérieure* D'A *les longueurs* $D'I_b$, $D'I_c$ *dont les projections sur* AB *soient aussi* $\frac{l}{2}$: *les droites* OI, OI_a, OI_b, OI_c *sont respectivement perpendiculaires à* B'C', B"C', B'C", B'C' *et elles sont égales aux rayons des cercles circonscrits à* AB'C', AB"C', AB'C", AB'C'.

La solution est intuitive. La droite D'K, perpendiculaire sur B'C' et limitée à sa rencontre K avec la bissectrice AD de A, est évidemment le diamètre du cercle circonscrit à AB'C'. Or la projection de AK sur AB est $\frac{AB' + AC'}{2}$; celle de AD est $\frac{AB + AC}{2}$; celle de KD est donc l. Par suite, I est le milieu de KD; et comme O est le milieu de D'D, OI est parallèle à DK, par conséquent perpendiculaire à B'C', et OI est égal à $\frac{D'K}{2}$ c'est-à-dire au rayon de la circonférence circonscrite à AB'C'.

On raisonnera de même pour OI_a puis pour OI_b, OI_c en permutant D et D'.

Remarque. — On pourrait donner à l'énoncé ci-dessus une autre forme, en définissant

I comme le point de rencontre des perpendiculaires élevées à BC' et CB', respectivement en leur milieu;

I_a comme le point de rencontre des perpendiculaires élevées à BC' et CB", respectivement en leur milieu;

I_b comme le point de rencontre des perpendiculaires élevées à CB' et BC", respectivement en leur milieu;

I_c comme le point de rencontre des perpendiculaires élevées à BC' et CB', respectivement en leur milieu.

QUESTION 306

Solution par M. Teissier, élève au lycée de Nice.

Deux cercles variables tangents entre eux sont, en outre, tangents chacun à une droite fixe, en un point fixe. Quel est le lieu de leur point de contact? (d'Ocagne.)

Soient Δ, Δ' deux circonférences mutuellement tangentes en M, et touchant deux droites fixes CP, CQ, aux points fixes P, Q.

En posant OPM = α, O'QM = β, le pentagone CPOO'Q et le quadrilatère CPMQ donnent

$$C + \frac{\pi}{2} + \pi - 2\alpha + \pi - 2\beta + \frac{\pi}{2} = 3\pi,$$

$$C + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta + \text{PMQ} = 2\pi.$$

Finalement $\text{PMQ} = \pi - \frac{C}{2}.$

Le lieu de M est une circonférence, etc.

Si les droites Δ, Δ' sont parallèles, le lieu est évidemment la droite PQ.

Si Δ et Δ' coïncident, le lieu demandé est le cercle décrit sur PQ comme diamètre.

Nota. — Solutions diverses par MM. Sollertinsky, à Gatschina; Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix; Louis Bénezech; Vazou, professeur au collège de Saulieu; A. Boutin.

QUESTION 308

Solution par M. DE TIMES.

On donne une circonférence Δ *et un diamètre* AB *: on propose de trouver, sur* Δ, *un point* M *tel que la tangente en* M, *rencontrant* AB *prolongé en* P, *on ait*

$$AM = 2MP.$$

On démontrera que le point cherché M *se projette, sur* AB, *en un point* M' *tel que* AM' *est égal au côté du triangle équilatéral inscrit à* Δ. (G. L.)

Soient O (*) le centre; R le rayon du cercle Δ; α l'angle MOM'; on a

$$MAB = \frac{\alpha}{2}$$

et par conséquent $$AM = 2R\cos\frac{\alpha}{2}.$$

D'ailleurs $$MP = R\,\text{tang}\,\alpha,$$

et, par suite, $$\cos\frac{\alpha}{2} = \text{tang}\,\alpha.$$

Élevant au carré et remplaçant $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ par $1 + \cos\alpha$, on a

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 2 = 0.$$

Cette équation admet, pour $\cos\alpha$, une seule racine acceptable,

$$\cos\alpha = \sqrt{3} - 1.$$

Ainsi,

$$OM' = R + R(\sqrt{3} - 1) = R\sqrt{3},$$

ce qui prouve que OM' est égal au côté du triangle équilatéral inscrit au cercle Δ.

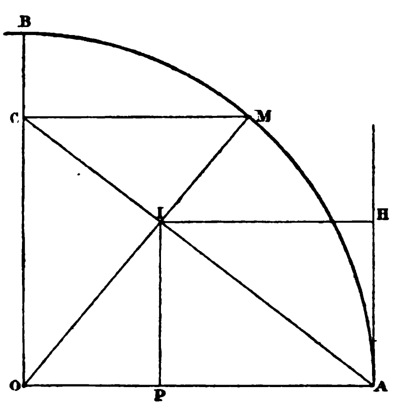
NOTA. — Solutions diverses par MM. Lavieuville, professeur au collège de Dieppe; Louis Bénezech; B. Sollertinsky à Gatschina; I. Beyens, capitaine du Génie, à Cadix; Svéchnicoff, professeur au gymnase de Troïtzk.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

QUESTION 310

Solution par M. J. M. Galban, élève à l'École Polytechnique de Madrid.

On considère une circonférence Δ *et deux rayons rectangulaires* OA *et* OB. *D'un point* M, *mobile sur* Δ, *on abaisse une perpendiculaire* MC *sur* OB : *les droites* AC, OM *se coupent en* I. *Démontrer que le lieu de* I *est une parabole ayant pour foyer le point* O *et pour directrice la tangente en* A. (G. L.)



Il suffit de montrer que

$$OI = IH = AP.$$

Les triangles API, AOC semblables donnent :

$$\frac{OC}{PI} = \frac{OA}{AP}.$$

Les triangles semblables, OCM, OPI donnent aussi

$$\frac{OC}{PI} = \frac{OM}{OI}.$$

Par suite,

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OM}{OI}.$$

Or

$$OA = OM,$$

donc

$$AP = OI.$$

Nota. — Solutions diverses par MM. A. Boutin; E. Vigarié; L. Benezech; B. Sollertinsky; Ziegel, élève au lycée Condorcet; I. Beyens, capitaine du Génie, à Cadix; Baudran, élève en mathématiques spéciales, au lycée de Rouen; Vazou, professeur au collège de Saulieu; Lavieuville, professeur au collège de Dieppe.

M. Vigarié nous fait observer que la proposition qui fait l'objet de cette question a été donnée comme *Nouvelle construction de la parabole par points* dans les *Questions de Mathématiques Élémentaires*, de M. H. Vuibert, (1880, p. 140, exercice 31), ce que nous ignorions.

QUESTIONS PROPOSÉES

366. — Entre trois droites concourantes SX, SY, SZ sont inscrits deux triangles ABC, LMN. Dans les circonférences circonscrites à SBC, SCA, SAB, on trace les cordes SP, SQ, SR, respectivement parallèles à MN, NL, LM. Démontrer que les triangles PQR, LMN sont symétriquement semblables.

(Bernès.)

367. — Sur le côté BC d'un triangle ABC, on porte BD $= l$; et, sur les côtés BA, CA, on porte cette même longueur l dans les directions BA, CA et dans les directions contraires, BB' $=$ BB'' $= l$, CC' $=$ CC'' $= l$. Si E et F sont les symétriques de C, relativement aux milieux de DC' et de DC'', et que O, I, I_a, I_b, I_c désignent les centres de la circonférence circonscrite, du cercle inscrit, et des cercles ex-inscrits à ABC, les droites B'E, B'F, B'F, B''E sont respectivement perpendiculaires et proportionnelles aux droites OI, OI_a, OI_b, OI_c. Il y a égalité, lorsque l est égal au rayon de la circonférence circonscrite.

(Bernès.)

368. — Tout nombre de la forme $(2p + 1)^2(2q + 1)$ peut, de deux façons différentes, être considéré comme la différence de deux carrés. *(G. Russo.)*

ERRATUM

Dans la question 365, page 120, ligne 12; *au lieu de* BC, *lisez* AC.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 11922-5-90.

SUR LE CENTRE DES DISTANCES PROPORTIONNELLES

Par M. **L. Bénezech.**

(*Suite et fin*, voir p. 123.)

4. — Application de la formule (2).

Soient le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et un point O qui n'est pas situé sur les faces.

Affectons, comme dans le paragraphe précédent, les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 de coefficients α_1, α_2, α_3, α_4 respectivement égaux aux volumes algébriques des tétraèdres $(OA_2A_3A_4)$, $(OA_3A_4A_1)$, $(OA_4A_1A_2)$, $(OA_1A_2A_3)$. Ces quantités α_1, α_2, α_3, α_4, sont les coordonnées *barycentriques* du point O, par rapport au tétraèdre de référence $A_1A_2A_3A_4$; elles sont liées par l'égalité $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = V$; (V désignant le volume du tétraèdre).

Soit M un point quelconque; d'après la relation (2), on a :

$$\alpha_1\overline{MA_1}^2 + \alpha_2\overline{MA_2}^2 + \alpha_3\overline{MA_3}^2 + \alpha_4\overline{MA_4}^2 =$$
$$\alpha_1\overline{OA_1}^2 + \alpha_2\overline{OA_2}^2 + \alpha_3\overline{OA_3}^2 + \alpha_4\overline{OA_4}^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\ \overline{OM}^2$$

Supposons que le point M coïncide, successivement, avec les quatre sommets du tétraèdre. Nous avons :

$$(5)\quad \begin{cases} (V+\alpha_1)\overline{OA_1}^2 + \alpha_2\overline{OA_2}^2 + \alpha_3\overline{OA_3}^2 + \alpha_4\overline{OA_4}^2 = \alpha_2\overline{A_1A_2}^2 + \alpha_3\overline{A_1A_3}^2 + \alpha_4\overline{A_1A_4}^2, \\ \alpha_1\overline{OA_1}^2 + (V+\alpha_2)\overline{OA_2}^2 + \alpha_3\overline{OA_3}^2 + \alpha_4\overline{OA_4}^2 = \alpha_1\overline{A_2A_1}^2 + \alpha_3\overline{A_2A_3}^2 + \alpha_4\overline{A_2A_4}^2, \\ \alpha_1\overline{OA_1}^2 + \alpha_2\overline{OA_2}^2 + (V+\alpha_3)\overline{OA_3}^2 + \alpha_4\overline{OA_4}^2 = \alpha_1\overline{A_3A_1}^2 + \alpha_2\overline{A_3A_2}^2 + \alpha_4\overline{A_3A_4}^2, \\ \alpha_1\overline{OA_1}^2 + \alpha_2\overline{OA_2}^2 + \alpha_3\overline{OA_3}^2 + (V+\alpha_4)\overline{OA_4}^2 = \alpha_1\overline{A_4A_1}^2 + \alpha_2\overline{A_4A_2}^2 + \alpha_3\overline{A_4A_3}^2, \end{cases}$$

d'où

$$(6)\quad \overline{OA_1}^2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_2\overline{A_1A_2}^2 + \alpha_3\overline{A_1A_3}^2 + \alpha_4\overline{A_1A_4}^2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1\overline{A_2A_1}^2 + \alpha_3\overline{A_2A_3}^2 + \alpha_4\overline{A_2A_4}^2 & V+\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1\overline{A_3A_1}^2 + \alpha_2\overline{A_3A_2}^2 + \alpha_4\overline{A_3A_4}^2 & \alpha_2 & V+\alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1\overline{A_4A_1}^2 + \alpha_2\overline{A_4A_2}^2 + \alpha_3\overline{A_1A_3}^2 & \alpha_2 & \alpha_3 & V+\alpha_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V+\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & V+\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & V+\alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & V+\alpha_4 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{V(\alpha_2\overline{A_1A_2}^2 + \alpha_3\overline{A_1A_3}^2 + \alpha_4\overline{A_1A_4}^2) - \Sigma\alpha_1\alpha_2\overline{A_1A_2}^2}{V^2}.$$

Cette formule fait connaître la distance d'un point quelconque à l'un des sommets du tétraèdre de référence, en fonction des coordonnées barycentriques de ce point.

REMARQUE. — Lorsque le point O coïncide avec le centre de gravité G, on a :

$$\overline{GA}^2 = \frac{4(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2) - \Sigma\overline{A_1A_2}^2}{16}$$

$$= \frac{3(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2) - (\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_2A_4}^2 + \overline{A_3A_4}^2)}{16}.$$

On peut observer, à ce propos, que la *Question 344* se déduit immédiatement de cette formule. En effet, $GA_1 = \frac{3}{4}\,G'A_1$, G' étant le centre de gravité de la face $A_2A_3A_4$.

De la formule (6), et des formules analogues, on déduit :

(7) $$\alpha_1\overline{OA_1}^2 + \alpha_2\overline{OA_2}^2 + \alpha_3\overline{OA_3}^2 + \alpha_4\overline{OA_4}^2$$

$$= \frac{V[2\Sigma\alpha_1\alpha_2\overline{A_1A_2}^2] - V\Sigma\alpha_1\alpha_2\overline{A_1A_2}^2}{V^2} = \frac{\Sigma\alpha_1\alpha_2\overline{A_1A_2}^2}{V}.$$

En supposant que le point O représente : 1° le centre de gravité G ; 2° le centre de la sphère inscrite I, on obtient les deux relations suivantes :

$$\overline{GA_1}^2 + \overline{GA_2}^2 + \overline{GA_3}^2 + \overline{GA_4}^2 = \frac{\Sigma\overline{A_1A_2}^2}{4}$$

$$\Sigma s_1\overline{IA_1}^2 = \frac{\Sigma s_1s_2\overline{A_1A_2}^2}{\Sigma s_1},$$

s_1, s_2, s_3, s_4 désignant les aires des faces du tétraèdre.

Des formules (6) et (7), on peut déduire une expression de la distance de deux points, en fonction des coordonnées barycentriques de ces points, par rapport à un tétraèdre de référence. Soient, en effet, les deux points $O(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $O'(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4)$.

On a : $$\alpha_1\overline{O'A_1}^2 + \alpha_2\overline{O'A_2}^2 + \alpha_3\overline{O'A_3}^2 + \alpha_4\overline{O'A_4}^2$$

$$= \alpha_1\overline{OA_1}^2 + \alpha_2\overline{OA_2}^2 + \alpha_3\overline{OA_3}^2 + \alpha_4\overline{OA_4}^2 + V.\overline{OO'}^2$$

ou $$\sum\alpha_1\frac{V(\alpha'_2\overline{A_1A_2}^2 + \alpha'_3\overline{A_1A_3}^2 + \alpha'_4\overline{A_1A_4}^2) - \Sigma\alpha'_1\alpha'_2\overline{A_1A_2}^2}{V^2}$$

$$= \frac{\Sigma\alpha_1\alpha_2\overline{A_1A_2}^2}{V} + V\overline{OO'}^2.$$

On en déduit

$$\Sigma\alpha_1(\alpha'_2\overline{A_1A_2}^2 + \alpha'_3\overline{A_1A_3}^2 + \alpha'_4\overline{A_1A_4}^2) - \Sigma\alpha'_1\alpha'_2\overline{A_1A_2}^2 - \Sigma\alpha_1\alpha_2\overline{A_1A_2}^2$$
$$= V^2.\overline{OO'}^2.$$

D'où

$$(8) \qquad \overline{OO'}^2 = \frac{-\Sigma\overline{A_1A_2}^2(\alpha_1 - \alpha'_1)(\alpha_2 - \alpha'_2)}{V^2}.$$

Cette formule est une généralisation de celle qui a été donnée par M. Plamenewsky. (Voir *J. M. E.* 1889, p. 150.)

Si, dans la relation (8), on considère α'_1, α'_2, α'_3, α'_4 comme des coordonnées courantes, on a l'équation d'une sphère ayant pour rayon OO′, et pour centre le point $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

On peut aussi donner cette équation, en mettant en évidence les puissances des sommets du tétraèdre, par rapport à la sphère considérée. On a, en effet,

$$\alpha_1\overline{O'A_1}^2 + \alpha_2\overline{O'A_2}^2 + \alpha_3\overline{O'A_3}^2 + \alpha_4\overline{O'A_4}^2 = \alpha_1\overline{OA_1}^2 + \alpha_2\overline{OA_2}^2$$
$$+ \alpha_3\overline{OA_3}^2 + \alpha_4\overline{OA_4}^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\overline{OO'}^2,$$

ou, en tenant compte de (7),

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1\overline{O'A_1}^2 + \alpha_2\overline{O'A_2}^2 + \alpha_3\overline{O'A_3}^2 + \alpha_4\overline{O'A_4}^2$$
$$= \Sigma\alpha_1\alpha_2\overline{A_1A_2}^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\overline{OO'}^2.$$

Finalement,

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)[\alpha_1(\overline{OO'}^2 - \overline{O'A_1}^2) + \alpha_2(\overline{OO'}^2 - \overline{O'A_2}^2)$$
$$+ \alpha_3(\overline{OO'}^2 - \overline{O'A_3}^2) + \alpha_4(\overline{OO'}^2 - \overline{O'A_4}^2)] + \Sigma\alpha_1\alpha_2\overline{A_1A_2}^2 = 0.$$

Remarque I. — Le système d'équations (5) permet de trouver la relation qui existe entre les distances mutuelles de cinq points situés, d'une manière quelconque, dans l'espace. Soient cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Désignons par α_1, α_2, α_3, α_4, les coordonnées barycentriques du point A_5 par rapport au tétraèdre de référence $A_1A_2A_3A_4$, et représentons par d_{ik}, le carré de la distance des points A_i, A_k. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} 2\alpha_1d_{15}+\alpha_2(d_{25}+d_{15}-d_{12})+\alpha_3(d_{35}+d_{15}-d_{13})+\alpha_4(d_{45}+d_{15}-d_{14})=0. \\ \alpha_1(d_{15}+d_{25}-d_{12})+2\alpha_2d_{25}+\alpha_3(d_{35}+d_{25}-d_{23})+\alpha_4(d_{45}+d_{25}-d_{24})=0. \\ \alpha_1(d_{15}+d_{35}-d_{13})+\alpha_2(d_{25}+d_{35}-d_{23})+2\alpha_3d_{35}+\alpha_4(d_{45}+d_{35}-d_{34})=0. \\ \alpha_1(d_{15}+d_{45}-d_{14})+\alpha_2(d_{25}+d_{45}-d_{24})+\alpha_3(d_{35}+d_{45}-d_{34})2\alpha_4+d_{45}=0. \end{array}\right.$$

En éliminant α_1, α_2, α_3, α_4, entre ces quatre équations, on

trouve

$$\begin{vmatrix} 2d_{15} & d_{25}+d_{15}-d_{12} & d_{35}+d_{15}-d_{13} & d_{45}+d_{15}-d_{14} \\ d_{15}+d_{25}-d_{12} & 2d_{25} & d_{35}+d_{25}-d_{23} & d_{45}+d_{25}-d_{24} \\ d_{15}+d_{35}-d_{13} & d_{25}+d_{35}-d_{23} & 2d_{35} & d_{45}+d_{35}-d_{34} \\ d_{15}+d_{45}-d_{14} & d_{25}+d_{45}-d_{24} & d_{35}+d_{45}-d_{34} & 2d_{45} \end{vmatrix} = 0,$$

relation qui peut se mettre sous la forme suivante (Voyez *Rouché et de Combcrousse*, *Géométrie*, t. II, 4e édit., p. 547) :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque II. — Si l'on considère un triangle ABC, on peut établir, par la même méthode, des formules analogues à celles qui précèdent. Nous allons les indiquer, en employant les notations ordinaires de la géométrie du triangle.

1° Distance d'un point quelconque O (α, β, γ), au sommet A, du triangle de référence :

$$\overline{OA}^2 = \frac{S(\beta c^2 + \gamma b^2) - a^2\beta\gamma - b^2\gamma\alpha - c^2\alpha\beta}{S^2}.$$

2° Distance de deux points (α, β, γ) $(\alpha', \beta', \gamma')$:

$$\delta^2 = - \frac{\Sigma a^2(\beta - \beta')(\gamma - \gamma')}{S^2}.$$

3° Relation entre les distances mutuelles de quatre points quelconques du plan :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les formules qui précèdent permettent de résoudre la *Question 348* (*J. M. E.*, 1889).

On a, en effet,

$$\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KC}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 3d^2$$

relation que l'on peut écrire sous les formes suivantes, en

observant que les coordonnées barycentriques du point K sont proportionnelles à a^2, b^2, c^2 :

$$\sum \frac{b^2c^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(\Sigma a^2)^2} = \frac{\Sigma a^2}{3} + 3d^2,$$

$$3(2\Sigma a^4b^2 - 3a^2b^2c^2) = (\Sigma a^2)^3 + 9d^2(\Sigma a^2)^2,$$

$$6\Sigma a^4b^2 - 9a^2b^2c^2 = \Sigma a^6 + 3\Sigma a^4b^2 + 6a^2b^2c^2 + 9d^2(\Sigma a^2)^2,$$

d'où $$9d^2(\Sigma a^2)^2 = -\Sigma a^6 + 3\Sigma a^4b^2 - 15a^2b^2c^2.$$

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

D'UN THÉORÈME DE M. ARTZT

Le théorème dont nous venons de pàrler correspond à l'énoncé suivant :

Pour tout triangle ABC, *il existe une parabole* P_a *tangente, aux points* B, C, *aux côtés* AB, AC; *le demi-paramètre de cette courbe est égal à*

$$\frac{S^2}{m^3}.$$

Dans cette formule, S *désigne l'aire de* ABC; m *est la longueur de la médiane* AM *qui correspond au sommet* A (*).

Des propriétés connues prouvent que : 1° P_a passe par le milieu de AM ; 2° la tangente en ce point est la droite B'C' obtenue en joignant le milieu de AB, au milieu de AC; 3° le foyer F appartient au cercle circonscrit au triangle AB'C' (théorème de Lambert (**); 4° F appartient aussi à la

---

(*) Ce théorème a été énoncé par M. Artzt en 1884, dans le *Programme scolaire du Gymnase de Recklinghausen.* Une démonstration en a été donnée par M. Brocard, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*; 1885, p. 124. Les formules indiquées *(loc. cit.)* sont inexactes. Elles ont été corrigées à la p. 240 du volume cité, mais incomplètement. Le facteur numérique de S^2 est égal à 1 et non à 8.

Pour éviter toute confusion, il faut convenir que le *paramètre* d'une conique est la longueur de la corde focale qui est perpendiculaire à l'axe focal. C'est, d'ailleurs, la convention ordinaire. (Voyez *Journal,* p. 128).

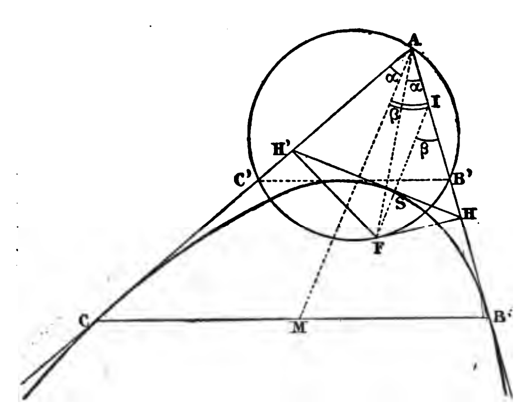
(**) *Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à une parabole passe par le foyer de cette courbe.*

symédiane du sommet A (théorème de Poncelet (*); 5° En projetant F sur les côtés AB, AC, on obtient deux points H, H'; HH' est la tangente au sommet.

Nous poserons

$$CAM = \alpha, \qquad MAB = \beta,$$

et nous désignerons par R le rayon du cercle circonscrit à ABC; R sera donc le diamètre du cercle circonscrit à AB'C'.



Le quadrilatère inscrit C'AB'F donne

$$B'C'.AF = B'F.AC' + C'F.AB',$$

ou

$$AF \sin A = B'F \sin B + C'F \sin C.$$

On a, d'ailleurs

$$B'F = R \sin \alpha,$$

$$C'F = R \sin \beta;$$

et

$$(1) \qquad \frac{m}{\sin C} = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \qquad \frac{m}{\sin B} = \frac{a}{2 \sin \beta}.$$

De ces égalités, on conclut

$$AF \sin A = \frac{aR}{m} \sin B \sin C,$$

ou

$$(2) \qquad AF = \frac{2R^2}{m} \sin B \sin C.$$

Menons FI parallèle à AM : FI est l'axe de P_a; la projection de FH sur FI donne le sommet S de la parabole. On a donc

$$FS = \frac{p}{2}.$$

Il est facile d'obtenir, d'après cela, la valeur de p.

Le triangle AFI donne

$$FI = AF \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

(*) *Les tangentes issues d'un point, à une conique, sont isogonales avec les droites qui vont, du point considéré, aux deux foyers.*

ou, en tenant compte des égalités (1), (2),

$$FI = \frac{2R^2}{m} \sin^2 C = \frac{c^2}{2m}.$$

Mais $$FS = FH \sin \beta = FI \sin^2 \beta;$$

donc $$\frac{p}{2} = \frac{c^2 \sin \beta}{2m} = \frac{c^2}{2m} \cdot \frac{a^2 \sin^2 B}{4m^2} = \frac{S^2}{2m^3};$$

d'où, finalement, $$p = \frac{S^2}{m^3}.$$

G. L.

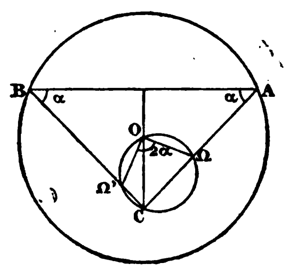
SUR LE 176e PORISME (*)

par M. **Lauvernay.**

Ce porisme, peut s'énoncer ainsi :

La base AB *d'un triangle isoscèle* ABC *qui reste semblable à lui-même, est une corde mobile d'un cercle fixe* Δ. *Si* AC *passe par un point fixe* Ω, BC *passe par un autre point fixe* Ω'.

Cette propriété s'établit bien simplement, comme il suit. Soit O le centre de Δ ; la circonférence δ, circonscrite au triangle OCΩ, coupe BC en un certain point Ω'. L'angle Ω'OΩ étant supplémentaire de BCA, est constant. De plus, les points C, O étant situés sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB, les angles BCO, ACO sont égaux; par suite, les cordes OΩ, OΩ' qui, dans δ, correspondent à des angles inscrits égaux, sont égales.



L'angle Ω'OΩ étant constant, et OΩ' étant égal à OΩ, on voit que Ω' est fixe, si, comme nous le supposons, Ω est lui-même un point fixe.

(*) On trouvera dans le numéro de mai du journal *Mathesis* (p. 115) une démonstration offrant une grande analogie avec celle que nous publions ici et qui nous avait été communiquée antérieurement. G. L.

ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Auguste Morel.**

(*Suite*, voir p. 127.)

III. — *L'Ellipse.*

55. — L'ellipse est une section conique dans laquelle l'excentricité est inférieure à l'unité.

Dans ce cas, comme nous l'avons déjà vu, il y a deux sommets A et A'. Ces sommets sont situés du même côté de la directrice que le foyer correspondant. L'un d'eux est en A, entre le foyer F et le pied X de la directrice sur l'axe, et plus près de F que de X. L'autre sommet A' est sur le prolongement de XF; c'est le point conjugué du point A, par rapport au segment FX.

Nous savons aussi que le milieu de AA' est un point par lequel passent tous les diamètres de la courbe; ce point est un centre de symétrie de la figure. Nous en avons déduit l'existence d'un second foyer F', et celle d'une seconde directrice $D'D'_1$, symétriques du foyer F et de la directrice DD_1, par rapport au centre.

Fig. 15.

D'après cela, la courbe est tout entière comprise entre ses deux directrices.

56. Théorème. — *La somme des rayons vecteurs d'un point quelconque de l'ellipse est constante et égale à* AA'.

Soit M un point quelconque de la courbe. Traçons les rayons vecteurs FM, F'M; et, par le point M, menons mMm' parallèle à l'axe. Nous avons

$$\frac{FM}{Mm} = \frac{F'M}{Mm'} = \frac{FA}{AX} = \frac{F'A}{AX'};$$

et, par suite,
$$\frac{FM + F'M}{Mm + Mm'} = \frac{FA + F'A}{AX + AX'}.$$

Or, on a $Mm + Mm' = AX + AX'$.

Par conséquent, $F'A = FA'$,
$$FM + F'M = FA + FA' = AA'.$$

57. Théorème. — *Le rapport de la distance des deux foyers à la distance des deux sommets est égal à l'excentricité.*

En effet, en appelant k l'excentricité, on a
$$k = \frac{FA}{AX} = \frac{F'A}{AX'}.$$

Mais les deux sommets étant symétriques par rapport au centre, ainsi que les pieds des directrices sur l'axe, on voit que $AX' = A'X$.

Par suite,
$$k = \frac{FA}{AX} = \frac{F'A}{A'X};$$

d'où
$$\frac{F'A - FA}{A'X - AX} = k,$$

ou, enfin,
$$\frac{FF'}{AA'} = k.$$

58. Théorème. — *La normale à l'ellipse est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui aboutissent au pied de la normale.*

Soit M le point considéré sur l'ellipse et G le point où la normale en M rencontre l'axe. On sait que $\frac{FG}{FM}$ est égal à l'excentricité, et il en est de même du rapport $\frac{F'G}{F'M}$. D'après cela,
$$\frac{FG}{FM} = \frac{F'G}{F'M}.$$

Cette proportion prouve que MG est la bissectrice de l'angle, bien déterminé, formé par les semi-droites MF, MF'.

En effet, la proportion précédente donne

$$\frac{FG}{FM} = \frac{FG + F'G}{FM + F'M}.$$

Comme, d'autre part, le dénominateur, dans le second membre est égal à AA', et que l'excentricité est aussi égale à $\frac{FF'}{AA'}$, on voit que

$$\frac{FG + F'G}{AA'} = \frac{FF'}{AA'},$$

d'où

$$FG + F'G = FF',$$

ce qui prouve que le point G est entre F et F'; la ligne MG est donc bien la bissectrice de l'angle FMF' des rayons vecteurs.

59. Corollaire. — *La tangente à l'ellipse en un point est également inclinée sur les rayons vecteurs qui passent par le point de contact.*

En effet, la tangente, étant perpendiculaire à la normale, est confondue avec la bissectrice de l'angle formée par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre rayon vecteur.

60. Théorème. — *Le lieu géométrique des projections des foyers, sur les tangentes, est la circonférence de cercle décrite sur le grand axe comme diamètre.*

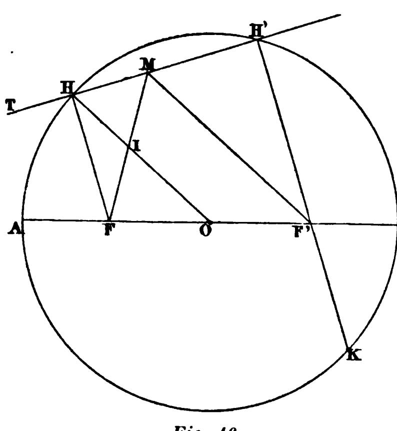


Fig. 16.

Soit la tangente MT, dont le point de contact est M, soit H la projection du foyer F sur la tangente. Menons les rayons FM, F'M, et par le point H, traçons HI parallèle à MF'. Puisque l'angle FMT est égal à F'MT', il est aussi égal à MHI. Donc la ligne MI est médiane du triangle rectangle MHF, et l'on a

$$MI = HI = IF.$$

D'autre part, la droite HI étant parallèle à MF', et passant

par le milieu I de FM, passe aussi par le milieu O de FF′, c'est-à-dire par le centre. De plus, IO est égal à la moitié de F′M. Donc IO + IH est égale à la demi-somme des droites MF et MF′, c'est-à-dire que DH est égale à OA.

Par suite, le lieu du point H est la circonférence dont le centre est O, et dont le rayon est égal à OA.

61. — *Réciproquement*, si par un point fixe F pris à l'intérieur d'un cercle, on fait passer un des côtés d'un angle droit dont le sommet parcourt la circonférence, l'autre côté est toujours tangent à une ellipse ayant pour grand axe le diamètre AA′ du cercle donné.

En effet, considérons une position FHT′ de cet angle droit; menons le rayon OH, puis la droite FM qui fait avec FH un angle HFM égal à FHO, et qui rencontre HT′, en M, et HO en I. On a FM = 2.HI. Par le point M, menons MF′ parallèle à HO, cette droite rencontre le diamètre FO en un point F′. tel que OF′ = OF. Donc, F′ est un point fixe. En outre, MF′ est le double de FO; donc :

$$FM + F'M = 2.HO = AA'.$$

Ainsi, le lieu du point M est une ellipse ayant F, F′ pour foyers et AA′ pour grand axe; et, comme la droite HMT′ fait des angles égaux avec les deux rayons vecteurs, MT est tangente, en M, à cette ellipse.

62. Théorème. — *Le produit des distances des deux foyers, à une tangente, est constant.*

Soit, en effet, HMH′ la tangente en M, H et H′ désignant les projections des foyers F et F′ sur cette tangente; prolongeons F′H′ jusqu'à sa rencontre, en K ,avec le cercle AA′.

Les deux cordes parallèles FH, F′H′ passant par les points F F′ symétriques par rapport au centre, sont elles-mêmes symétriques par rapport au centre des cercles; les trois points H, O, K sont en ligne droite, et FH = FK′.

Cela posé, on a

$$F'H' \times F'K = F'A' \times F'A = OA^2 - OF^2.$$

Donc, le produit F′H′ × F′K, et, par suite, le produit FH × F′H′, est constant.

Si nous considérons l'axe perpendiculaire à AA', il y a deux points de la courbe sur cet axe. En effet, nous avons vu, précédemment, que le point O est donné par la relation :

$$2.OX = AX + A'X.$$

Si nous prenons une ouverture de compas égale à $\frac{AF + A'F}{2}$ ou OA et que, du point F comme centre, nous décrivions un arc de cercle, il coupe l'axe OB en deux points B et B', parce que OF est moindre que OA. Ayant tracé FB, et Bb perpendiculaire à la directrice, nous avons

$$\frac{FB}{Bb} = \frac{AF + A'F}{AX + A'X} = \frac{AF}{AX} = k.$$

Le point B est donc un point de la courbe.

Cela posé, le triangle rectangle FOB donne

$$OB^2 = FB^2 - OF^2 = OA^2 - OF^2.$$

Ainsi, le rectangle des distances des foyers à une tangente est constant et égal au carré du demi petit axe.

63. Théorème. — *Le lieu géométrique du sommet d'un angle droit, circonscrit à une ellipse est un cercle* (cercle de Monge), *concentrique à cette ellipse.*

Observons d'abord que les foyers de l'ellipse étant intérieurs à la courbe et les projections des foyers, sur une tangente, étant sur le cercle AA', le point de concours de deux tangentes rectangulaires est extérieur à ce cercle.

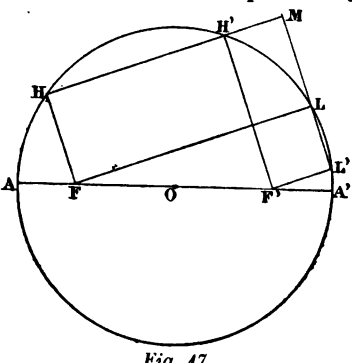


Fig. 17.

Cela posé, soit M un point d'où partent deux tangentes rectangulaires MH et ML'. Des foyers, abaissons les perpendiculaires FH, FH' sur la première tangente FL, F'L', sur la seconde. Les figures FHML, F'H'ML' sont des rectangles, et l'on a

$$FH = ML, \quad F'H' = ML'.$$

Or, le produit ML $\times$ ML' est égal au carré de la tangente

menée du point M au cercle AA′. Comme, d'autre part, le produit $ML \times ML' = FL \times F'L'$, est constant et égal à OB^2, il en résulte que la tangente menée du point M au cercle AA′, a une grandeur constante. Le lieu du point M est donc une circonférence concentrique au cercle AA′. Son rayon OM est égal à $\sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}$.

(A suivre.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

(Concours de 1890)

Composition de Mathématiques. (3 heures).

I. — Calcul logarithmique *(obligatoire)*. — On donne les côtés d'un triangle $a = 895839$, $b = 789858$, $c = 603649$; calculer l'angle A (celui-là seulement).

II. — Discuter les racines de l'équation

$$(m - 2)x^4 - (m - 1)(a^2 + b^2)x + ma^2b^2 = 0,$$

lorsque m varie.

III. — On donne dans un triangle : l'angle A, un côté adjacent b et le rapport du côté a à la médiane issue de A. Calculer le côté c. Discuter.

IV. — On donne dans l'espace deux droites orthogonales X et Y et leur perpendiculaire commune, qui rencontre X en I et Y en K. Une droite AB de longueur constante se meut en appuyant ses extrémités A et B, respectivement, sur X et sur Y. On joint AK et IB, ce qui forme le tétraèdre variable ABIK.

1° Démontrer que la somme des carrés des six arêtes est constante, que le rayon de la sphère circonscrite est constant, et que les trois droites joignant les milieux des arêtes opposées ont aussi des longueurs constantes. — 2° On sait que ces trois dernières droites se coupent au même point, qui est le milieu de chacune d'elles ; trouver le lieu géométrique de ce point.

Épure. (2 heures 1/2.)

Un cône de révolution a pour base sur le plan horizontal un cercle O de 50^{mm} de rayon, tangent à la ligne de terre et il a une hauteur de 112^{mm}. On mène : 1° par le milieu A de la génératrice de front (celle de gauche), le plan parallèle au plan tangent au cône suivant la génératrice opposée ; 2° la normale au cône en A qui concentre le plan horizontal en B, les tangentes BC et BD au cercle O et enfin les plans ABC et ABD.

On demande de représenter par ses projections le solide commun au cône et au tétraèdre que forment le plan horizontal et les trois plans précédents.

BACCALAURÉAT

(Session d'octobre-novembre 1889.) (*)

ACADÉMIE DE CAEN

1. — 1° Lieu des centres o des cercles tangents à un cercle donné Δ de centre f, de rayon R, et passant par un point donné f'. Distinguer la nature du lieu, suivant les positions relatives du point et du cercle donnés.

2° Démontrer que si a est un nombre premier autre que 2 et 3, $a^2 - 1$ est divisible par 24.

1° Si f' est extérieur à Δ, $of - of' = R$; le lieu est une hyperbole; c'est une ellipse, si f' est situé à l'intérieur de Δ.

2° On a
$$a^2 - 1 \equiv (a - 1)(a + 1).$$
Dans cette identité, a représente un nombre premier autre que 2 ; c'est donc un nombre *impair* ; $a - 1$, $a + 1$ sont deux nombres pairs, l'un divisible par 2, l'autre par 4 ; par suite $a^2 - 1$ renferme le facteur 8. D'ailleurs, des trois nombres
$$a - 1, \quad a, \quad a + 1$$
un est divisible par 3. Ce n'est pas a, puisque a représente un nombre premier autre que 3. Donc...

2. — 1° Démontrer que si S désigne la somme des n premiers nombres entiers, le nombre $8S + 1$ est un carré parfait.

2° Résoudre un triangle connaissant l'aire S, le périmètre $2p$ et un côté, a.

1° On a
$$S = \frac{n(n+1)}{2},$$
et, par suite, $8S + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$.

2° Soient x, y les côtés inconnus, on a
$$x + y = 2p - a,$$
et
$$S^2 = p(p - a)(p - x)(p - y).$$
En posant $p - x = X$, $p - y = Y$, on voit que X, Y sont les racines de l'équation
$$Z^2 - aZ + \frac{S^2}{p(p - a)} = 0, \text{etc.}$$

(*) Ces énoncés sont empruntés à la collection publiée par la librairie Croville-Morant, 20, rue de la Sorbonne. (Session d'avril 1890; prix : 2 fr. 20 c.)

ACADÉMIE DE BORDEAUX

1. — 1° Exprimer tang $3a$ en fonction de sin $2a$.

2° Trouver les valeurs de x et y satisfaisant aux équations :

$$7x^2 + 3xy + x - 1 = 0,$$
$$7y^2 + 3xy - y - 1 = 0.$$

1° On sait que $\qquad \operatorname{tg} 3a = \dfrac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}.$

Il suffit d'exprimer tg a, en fonction de sin $2a$; or :

$$2 \operatorname{tg} a = 1 + \operatorname{tg}^2 a \sin 2a, \text{ etc.}$$

2° Les équations proposées donnent

$$7(x^2 - y^2) + x + y = 0.$$

On prendra donc, d'après cela, l'une d'entre elles, en lui associant successivement les équations :

$$x + y = 0, \qquad 7(x - y) + 1 = 0.$$

2. — 1° α et β étant les racines de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0,$$

former l'équation ayant pour racines α^4 et β^4.

2° Déterminer le centre de gravité de la surface latérale du tronc de cône.

1° On observe que

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2 = p^4 - 4p^2q + 2q^2,$$

et que $\qquad \alpha^4\beta^4 = q^4$, etc.

BIBLIOGRAPHIE

Nous signalons à nos lecteurs les ouvrages suivants (*) :

1° *Trigonometrische Aufgaben*, par MM. H. Lieber et E. von Lühmann (troisième édition, 1889; Prix, 4 mark.)

C'est un recueil très complet des formules de la trigonométrie et des relations qui existent entre les divers éléments d'un triangle. Les professeurs y trouveront une mine inépuisable de problèmes.

2° *Geometrische Konstruktion-Aufgaben* (nouvelle édition, 1889, prix, 2 mark 70.)

Cet ouvrage des mêmes auteurs est un recueil de problèmes très variés, classés par chapitres, et contenant des constructions diverses sur les triangles, les quadrilatères, la circonférence, le trapèze isocèle, etc.

(*) Tous ces ouvrages sont édités par la librairie Leonhard Simion, 121, Wilhelm-Strasse, à Berlin.

3° *Stereometrische Aufgaben*, par le Dr H. Lieber (1888; Prix 2 mark 40.) L'auteur donne, dans cet ouvrage, de nombreuses formules permettant de déterminer les éléments des principaux corps géométriques : prisme, pyramide, polyèdres réguliers, corps ronds, etc.

4° *Synthetische Beweise planimetrischer Sätze*, par W. Fuhrmann (1890). Cet ouvrage est, si l'on en excepte le chapitre supplémentaire de l'excellent *Sequel to Euclid* de M. Casey (*), le premier traité complet relatif à la géométrie du triangle. L'auteur aurait pu, sans inconvénient, supprimer, au début, une cinquantaine de pages, où il ne fait que reproduire des formules classiques, ou dans lesquelles il expose quelques règles générales, concernant les démonstrations géométriques; règles très connues et qui ne nous paraissent pas, ici, à leur place. Mais, à cette légère critique près, l'ouvrage de M. Fuhrmann nous a paru bien ordonné et très complet. Les amis de la géométrie récente seront heureux de lire un livre qui ne peut que les intéresser vivement. On peut seulement regretter, à cette place, qu'il ne soit pas sorti d'une plume française et que cette science de la Géométrie du triangle, née en France, n'ait pas été écrite par un Français.

QUESTION 309

Solution par M. SOLLERTINSKY, à Gatschina.

Soient AM, AN *deux cordes issues de l'extrémité* A *d'un diamètre* AB *appartenant à une circonférence* Δ. — *Démontrer que, pour mener par* A *une corde* AP, *moyenne géométrique entre* AM, AN, *il suffit : 1° de rabattre en* AP′ *sur* AB, *la hauteur* AH *du triangle* AMN ; *2° de considérer* P′ *comme étant la projection du point inconnu* P *sur* AB (**). (G. L.)

On sait que le rectangle des côtés AM, AN d'un triangle est équivalent au rectangle du diamètre AB du cercle circonscrit Δ, par la hauteur AH, relative au troisième côté MN.

D'ailleurs, toute corde AP d'un cercle Δ est moyenne proportionnelle entre le diamètre AB, qui passe par son extrémité A et sa projection AP′ = AH sur ce diamètre. Donc, etc.

(*) Ce supplément a été traduit par M. Fr. Falisse et avec une préface de M. Neuberg ; cette traduction forme un opuscule de 80 pages, en vente chez M. Gauthier-Villars.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

NOTA. — Solutions diverses par M. Félix Ziegel, élève au lycée Condorcet (Institution Springer); G. Baudran, élève en mathématiques spéciales au lycée de Rouen; G. Lavieuville, professeur au collège de Dieppe; de Times; Svéchnicoff, professeur au gymnase de Troïtzk; L. Bénezech; I. Beyens, capitaine du génie à Cadix; et J. M. Galban, élève à l'école polytechnique de Madrid.

QUESTION 311

Solution par M. SOLLERTINSKY (à Gatschina).

Soient ABC, A'B'C' *deux triangles* ORTHOLOGIQUES, *et* A''B''C'', A'''B'''C''',.... *des triangles dont les sommets divisent les droites* AA', BB', CC' *en parties proportionnelles. Démontrer que deux quelconques des triangles* A''B''C'', A'''B'''C'''.... *sont orthologiques.*

Soit P, *le point de concours des perpendiculaires abaissées de* A, B, C *sur* B''C'', C''A'', A''B''; *soit* Q, *celui des perpendiculaires abaissées de* A'', B'', C'' *sur* BC, CA, AB. *Lorsque le triangle* A''B''C'' *est remplacé successivement par chacun des autres* A'''B'''C''',.... :

1° Le point Q *décrit une droite;*

2° Le point P *décrit une hyperbole équilatère.*

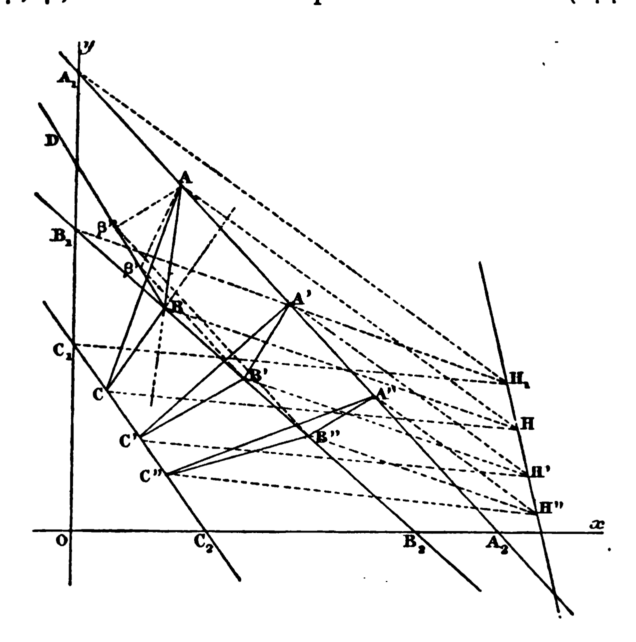
(J. Neuberg.)

1° Deux triangles ABC, A'B'C' sont dits *orthologiques* lorsque les perpendiculaires menées des sommets de l'un sur les côtés opposés de l'autre concourent en un même point.

Soit H l'orthocentre de ABC, et soit H' le point de concours des perpendiculaires menées de A', B', C' sur BC, CA, AB. Menons A''H'' perpendiculaire sur BC et rencontrant HH' en H''. Les droites AH, A'H', A''H'' étant parallèles, on a $\frac{HH''}{H'H''} = \frac{AA''}{A'A''}$, et comme $\frac{AA''}{A'A''} = \frac{BB''}{B'B''} = \frac{CC''}{C'C''}$, les perpendiculaires menées de B sur AC et de C sur AB passent par H''. Donc les triangles ABC, A''B''C'' sont orthologiques. Si l'on applique ce raisonnement aux triangles A''B''C'', ABC, A'''B'''C''', on voit que A''B''C'' et A'''B'''C''' sont orthologiques.

2° Menons les droites $A\beta'$, $A\beta''$,... $A\gamma'$, $A\gamma''$,... égales et

parallèles à A′B′, A″B″,... A′C′, A″C″,... Il est facile de voir que les points B, β′, β, sont en ligne droite, de même que C, γ′, γ″,... On en conclut que les faisceaux A (Bβ′β″...),



A (Cγ γ″...) sont homographiques avec les ponctuelles BB′B″..., CC′C″...

Cela posé, les perpendiculaires abaissées de C, B sur les côtés opposés des triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″... se correspondent dans des faisceaux homographiques avec les faisceaux A (Bβ′β″...), A (Cγ′γ″...); donc leurs points d'intersection H, P′, P″... appartiennent à une même conique passant par C, B, A; comme cette courbe passe par l'orthocentre du triangle ABC, c'est une hyperbole équilatère.

Nota. — M. Svéchnicoff, professeur au gymnase de Troïtzk, a résolu la même question.

Nota. — Parmi les triangles considérés, il y en a deux, $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, dont les sommets sont situés sur deux droites Ox, Oy, parallèles aux asymptotes de l'hyperbole. D'où ce théorème : Sur deux droites rectangulaires Ox, Oy, on prend deux ternes de points, $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, et l'on

divise les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 aux points A, B, C dans un même rapport. Deux quelconques des triangles ABC sont orthologiques.

Deux triangles symétriquement semblables sont toujours orthologiques. Les triangles ABC, A'B'C',... de la proposition 311 sont, deux à deux, symétriquement semblables. (J. Neuberg.)

QUESTION 312

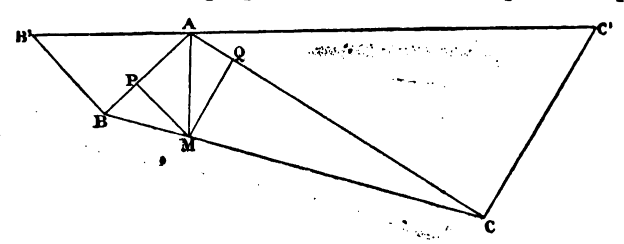
Solution par M. G. Russo, à Catanzaro.

Soit M *un point pris sur la base* BC *du triangle* ABC. *Si la perpendiculaire élevée en* A, *à la droite* AM, *coupe en* B' *et en* C' *les perpendiculaires élevées respectivement, à* AB *et à* AC, *en* B *et en* C, *on a*

$$\frac{AB'}{AC'}\cdot\frac{MB}{MC}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Corollaire. — *Si* AM *est symédiane de* ABC, *le sommet* A *est le milieu de* B'C'. (d'Ocagne.)

Soient MP, MQ les perpendiculaires menées par M respec-



tivement sur AB, AC. Les triangles semblables ABB', APM; ACC', AQM, donnent :

$$AB' : AB = AM : MP,$$
$$AC' : AC = AM : MQ,$$

d'où

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}\cdot\frac{MP}{MQ}.$$

Mais

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{MB\sin B}{MC\sin C}=\frac{MB}{MC}\cdot\frac{AC}{AB}.$$

On a donc

$$(1)\qquad \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{AB'}{AC'}\cdot\frac{MB}{MC}.$$

Corollaire. — Si AM est symédiane de ABC; alors

$$\frac{MB}{MC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2},$$

et, dans ce cas, l'égalité (1) donne AB′ = AC′; le point A est donc le milieu de B′C′.

NOTA. — Solutions diverses par MM. B. J. Sollertinsky, à Gatschina; Vazou, professeur au collège de Saulieu; de Times; Svéchnicoff, professeur au collège de Troïtzk; G. Lavieuville, professeur au collège de Dieppe; A. Boutin; Vigarié; J. Beyens, capitaine du génie, à Cadix.

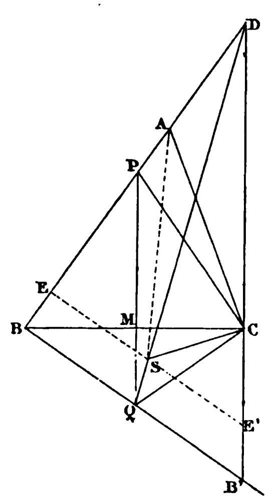
On peut, bien entendu, comme l'ont observé plusieurs des auteurs des solutions citées, éviter, dans la démonstration de cette question, l'emploi des notations trigonométriques.

QUESTION 313

Solution par M. B. J. SOLLERTISNKY, à Gatchina.

Les perpendiculaires élevées par le sommet C *et par le milieu* M *du côté* BC, *à ce côté, coupent le côté* AB *respectivement en* D *et en* P. *La perpendiculaire élevée en* C, *à* CP, *coupe* PM *en* Q. *Démontrer que la droite* DQ *et la perpendiculaire élevée en* C, *à* CA, *se coupent sur la symédiane, issue de* A, *du triangle* ABC.

(d'Ocagne.)



Supposons que la droite DQ et la perpendiculaire élevée en C, à CA, se coupent en S, et que BQ coupe CD en B′.

On observera d'abord que Q étant le milieu de BB′ et BCB′ étant un triangle rectangle, on a

$$BQ = QB' = CQ.$$

Ainsi DQ est la médiane du triangle BDB′.

La perpendiculaire abaissée de S sur AB coupant AB en E et DB′ en E′, est partagée au point S

en deux parties égales, puisqu'elle est parallèle à BB′ et que Q est le milieu de BB′.

D'ailleurs les triangles SE′C et ABC, ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, sont semblables; on a donc

$$\frac{SE'}{AB} = \frac{SC}{AC},$$

ou

$$\frac{SE}{SC} = \frac{AB}{AC}.$$

Le point S, étant situé dans l'intérieur de l'angle ABC, cette relation prouve que S appartient à la symédiane du triangle ABC, issue de A.

NOTA. — M. Svéchnicoff, professeur au Gymnase de Troïtzk, nous a adressé une solution trigonométrique de cette question.

QUESTION 319

Solution par M. LAVIEUVILLE, professeur au Collège de Dieppe.

Dans tout quadrilatère convexe, dont les angles sont A, B, C, D :

1° $$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2} = \sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2};$$

2° $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2} = \sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2};$$

3° $$\sin\frac{A+B}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}\right] = \sin\frac{B+C}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}\right];$$

4° $$\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\right] = \sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{D}{2}\cos\frac{A}{2}\right];$$

5° $$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+D}{2} = -\sin\frac{A}{2}\sin\left(C+\frac{B+D}{2}\right) + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{B+C}{2} + \sin\frac{D}{2}\sin\frac{C+D}{2}.$$

(E. Catalan.)

1° La relation évidente

$$(1)\qquad \cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{C+D}{2}=0,$$

donne

$$\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C+D}{2}+\cos\frac{C-D}{2}=\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C-D}{2}.$$

Or $\cos\frac{C-D}{2}=-\cos\left(\frac{A+B}{2}+C\right).$

On a donc

$$\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)+\left(\cos\frac{C+D}{2}+\cos\frac{C-D}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{A-B}{2}-\cos\left(\frac{A+B}{2}+C\right).$$

Transformant et simplifiant, on trouve

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}.$$

2° L'égalité (1) donne, de même,

$$\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+\left(\cos\frac{C-D}{2}-\cos\frac{C+D}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C-D}{2};$$

c'est-à-dire

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}.$$

3° On a :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2},$$

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D+B}{2}.$$

Multipliant en croix et observant que

$$\sin\frac{C+D}{2}=\sin\frac{A+B}{2}\quad\text{et}\quad\sin\frac{D+B}{2}=\sin\frac{C+A}{2},$$

on trouve la relation demandée.

4° La relation (4), en observant que $\sin\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B+D}{2}$, se déduit des égalités

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2},$$

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{D}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{D+B}{2}.$$

5° On a, successivement,

$$4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+D}{2}$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\times 2\cos\left(\frac{A+B}{4}-\frac{C+D}{4}\right)\cos\left(\frac{A+D}{4}-\frac{B+C}{4}\right)$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A-C}{2}+\cos\frac{B-D}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A-C}{2}+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-D}{2}$$

$$=\cos\left(A-\frac{C}{2}\right)-\cos\left(B+\frac{C}{2}\right)+\cos\frac{C}{2}-\cos\left(\frac{C}{2}+D\right)$$

$$=\cos\left(A-\frac{C}{2}\right)-\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}-\cos\left(B+\frac{C}{2}\right)+\cos\frac{C}{2}$$

$$-\cos\left(\frac{C}{2}+D\right)$$

$$=-\cos\left(\frac{A-C}{2}-\frac{C+B+D}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B+D}{2}+C\right)$$

$$+\cos\frac{C}{2}-\cos\left(B+\frac{C}{2}\right)+\cos\frac{C}{2}-\cos\left(\frac{C}{2}+D\right)$$

$$=-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(C+\frac{B+D}{2}\right)+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$

$$+2\sin\frac{D}{2}\sin\frac{C+D}{2};$$

et, finalement,

$$2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+D}{2}$$

$$=-\sin\frac{A}{2}\sin\left(C+\frac{B+D}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$

$$+\sin\frac{D}{2}\sin\frac{C+D}{2}.$$

NOTA. — Solutions analogues par MM. B. Sollertinsky à Gatschina et Vazou, professeur au collège de Saulieu.

QUESTIONS PROPOSÉES

369. — On donne un triangle rectangle isoscèle AOB, dont les côtés de l'angle droit OA, OB sont égaux à $a + \sqrt{a^2 + h^2}$. Du point O, comme centre, avec h pour rayon, on décrit un cercle qui coupe l'hypoténuse AB aux points C, C'.

Démontrer que si l'on projette l'un de ces points sur les côtés OA, OB, la droite qui passe par ces projections coupe la bissectrice de BOA en un point M tel que $OM = a\sqrt{2}$.

Cette propriété s'applique au triangle A'OB' obtenu en prenant sur les prolongements des segments AO, BO des points A', B' tels que

$$OA' = OB' = \sqrt{a^2 + h^2} - a.$$

Déduire, de cette remarque, une solution du problème de Pappus et la discussion qu'il comporte. *(G. L.)*

370. — L'équation

$$3x^2(a + b + c) + 4x(ab + bc + ca) + 4abc = 0,$$

a ses racines réelles, quels que soient a, b, c. Montrer qu'elles sont rationnelles quand on suppose :

$$1^\circ\ b = c, \qquad 2^\circ\ 2bc = a(b + c).$$

(Lauvernay.)

ERRATA

Page 101, l. 7, au lieu de r_1..., lisez r_2.
Page 115, l. 4 (en remontant), au lieu de C''..., lisez ω.

NOTA. — Nous avons oublié de mentionner, dans le dernier numéro, M. Svéchnicoff qui nous avait adressé de bonnes solutions des questions 306, 310.

Nous rappelons à nos correspondants qu'ils sont priés de bien vouloir mettre *chaque question sur une feuille distincte.*

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14296-6-90.

ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Aug. Morel.**

(*Suite*, voir p. 152.)

---

64. Théorème. — *Soient* P *un point de l'ellipse,* A *et* A′ *les extrémités du grand axe; si les droites* PA *et* PA′ *rencontrent la directrice en* H *et* H′; *l'angle* HFH′ *est droit.*

Si l'on trace les droites FP, FH, cette dernière est également inclinée sur FA et sur FP.

Cela posé, abaissons Pp perpendiculaire à la directrice; Pp rencontre FH′ en I, et la directrice en p.

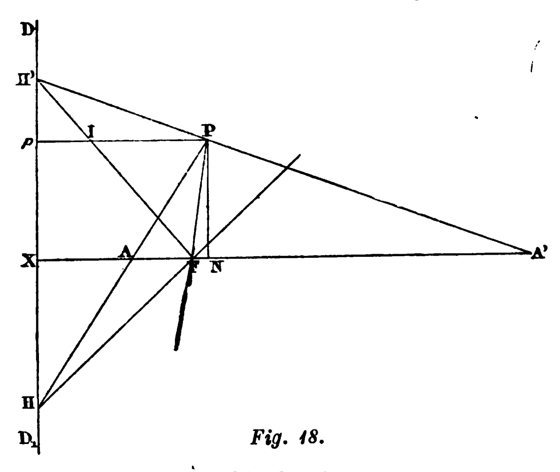


Fig. 18.

Les droites parallèles A′X, Pp étant rencontrées par trois droites concourantes, on a

$$\frac{PI}{Pp} = \frac{A'F}{A'X} = \frac{FP}{Pp}.$$

D'après cela, PI = FP; le triangle FPI est isoscèle. Donc

$$PFI = PIF = IFX.$$

Il en résulte que FH′ est la bissectrice de l'angle PFA; par suite elle est perpendiculaire à FH.

65. Théorème. — *Si, d'un point* P *d'une ellipse, on abaisse une perpendiculaire* PN *sur l'axe, le rapport de* $\overline{PN}^2$ *au produit* AN × NA′ *est constant.*

Joignons le point P aux points A et A′, et prolongeons les droites ainsi menées jusqu'à leurs rencontres avec la directrice en H et H′. Les triangles PAN, HAX, donnent

$$\frac{PN}{HX} = \frac{AN}{AX}.$$

De même, les triangles semblables A′PN, A′H′X prouvent que

$$\frac{PN}{H'X} = \frac{A'N}{A'X}.$$

Ces égalités donnent, par multiplication,

$$\frac{\overline{PN}^2}{HX.H'X} = \frac{AN.AN'}{AX.A'X}.$$

Or, l'angle HFH′ étant droit, on a

$$HX.H'X = \overline{FX}^2.$$

Donc $$\frac{\overline{PN}^2}{AN.A'N} = \frac{\overline{FX}^2}{AX.A'X}.$$

Le second membre est constant; il en est donc de même du premier.

66. Corollaire. — *Si l'on suppose que le point* P *soit en* B, *sur le petit axe, les droites* AN, A′N *seront égales, chacune, à* AO*; le théorème appliqué à ce cas particulier donne*

$$\frac{\overline{PN}^2}{AN \times A'N} = \left(\frac{BO}{AO}\right)^2;$$

telle est la valeur du rapport constant, considéré au paragraphe précédent.

67. Théorème. — *Si l'on considère un diamètre quelconque* COC′, *et la demi-ordonnée* PN *correspondante, le rapport de* $\overline{PN}^2$ *au produit* CN × C′N *est constant, pour chaque diamètre.*

D'après un théorème précédent si, dans une conique, on mène, par un point O, des droites AOA′, BOB′, parallèles à des directions fixes, le rapport des rectangles AO.A′O et BO.B′O ne dépend que des directions des droites AOA′, BOB′.

D'après cela, prenons un diamètre fixe COC'; alors la direction des cordes conjuguées sera constante. De plus, la corde PNP' conjuguée de COC', sera divisée en deux parties égales par COC'.

D'après le théorème précédent nous avons

$$\frac{PN.NP'}{CL.LC'} = const^e,$$

quelle que soit la position de la corde PNP'; mais comme PN = P'N, l'égalité précédente donne

$$\frac{\overline{PN}^2}{CN.NC'} = const^e.$$

68. Théorème. — *Soit* COC' *un diamètre quelconque; ayant mené par un point* P *de l'ellipse une tangente* PI, *rencontrant le diamètre prolongé en* I, *et l'ordonnée* PN *correspondant au diamètre, on a* $ON.OI = OC^2$.

Traçons la tangente en C; elle est parallèle à PN; soit H le point où elle rencontre PL; joignons le point C au point P, et menons la droite qui passe par le point H et le milieu L de

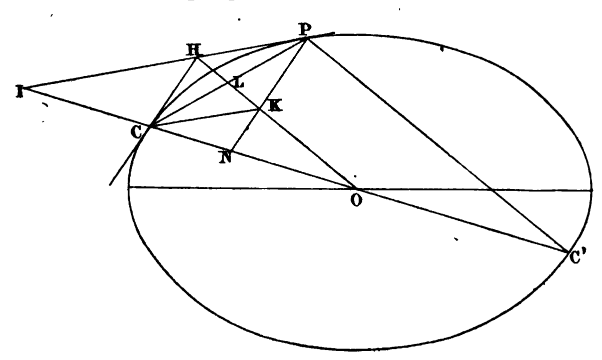


Fig. 19.

PC. La droite HL passant par le point de concours de deux tangentes et le milieu de leur corde de contact, passe aussi par le centre O. Si l'on trace PC', C' étant l'extrémité du diamètre, comme CO = OC', PC' est parallèle à HLO.

Cela posé, traçons le parallélogramme dont les côtés sont

HP et HC. Le quatrième sommet est sur HL, et nous avons

$$\frac{ON}{OC} = \frac{OK}{OH},$$

puis

$$\frac{OK}{OH} = \frac{OC}{OI}.$$

On tire, de ces deux proportions,

$$ON \times OI = \overline{OC}^2.$$

69. — Considérons une ellipse, ayant AA′ pour grand axe, et BB′ pour petit axe, puis le cercle décrit sur AA′ comme diamètre. Sur le grand axe, prenons un point N quelconque, par lequel nous menons, au grand axe, une perpendiculaire qui rencontre l'ellipse en P, et le cercle en Q. On a vu, précédemment, que

$$\frac{PN^2}{AN.AN'} = \frac{BO^2}{OA^2}.$$

D'autre part, une propriété, connue, du cercle donne

$$AN.A'N = \overline{NQ}^2.$$

De ces relations on déduit

$$\frac{PN}{NQ} = \frac{OB}{OA}.$$

Ainsi, *le rapport de l'ordonnée de l'ellipse à l'ordonnée correspondante du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre est constant, et égal au rapport du petit axe au grand axe.*

On déduit immédiatement, de là, les propositions suivantes:

1° *Les droites qui passent par deux points* P, P′ *de l'ellipse et par les points correspondants* (*) Q, Q′ *du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, coupent cet axe au même point.*

2° *Si l'on considère, dans le cercle, une série de droites parallèles; les droites correspondantes, dans l'ellipse, sont aussi parallèles.*

70. Théorème. — *Deux cordes supplémentaires sont parallèles à un système de diamètres conjugués.*

On appelle *cordes supplémentaires* deux cordes obtenues en

(*) Deux points P, Q sont dits *points correspondants* sur l'ellipse et sur le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, quand ils ont la même abscisse et lorsqu'ils sont situés du même côté par rapport au grand axe.

joignant un point de la courbe aux deux extrémités d'un même diamètre.

Cela posé, soient CP, C'P deux cordes supplémentaires. Joignons le centre O au milieu N de CP; la droite ON est le diamètre correspondant à la direction CP; de même, la droite ON', qui joint le centre au milieu N' de C'P, est le diamètre correspondant à la direction PC'.

Mais ON, qui passe par les milieux de deux côtés du triangle CPC', est parallèle au troisième côté; les deux directions CP et CP' sont donc telles que le diamètre correspondant à l'une soit parallèle à l'autre. Ainsi les deux directions sont conjuguées.

71. Considérons le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre et observons que les points A et A' sont conjugués sur FX. Inversement, F et X sont conjugués sur AA', et l'on a,

$$\overline{OA}^2 = OF.OX,$$

ou

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OF}{OA} = k.$$

D'après cela, le cercle AA' coïncide avec le cercle excentrique correspondant au point O.

Cela posé, nous pouvons nous proposer de chercher d'abord si une droite quelconque, menée par le centre, rencontre la courbe. A cet effet, traçons par le point O une droite quelconque; elle coupe la directrice en un certain point R. Menons la droite FR, qui, passant par le point F, intérieur au cercle, le coupe nécessairement en deux points m et n; tirons les droites Om et On, puis leurs parallèles FM et FN, qui rencontrent OR en M et N. Les points M, N appartiennent à la courbe. On a

$$\frac{ON}{OR} = \frac{Fn}{nR},$$

et

$$\frac{OM}{OR} = \frac{Fm}{mR}.$$

Mais, dans le cercle, la directrice étant perpendiculaire au diamètre AA', et passant par le point Z, conjugué du point F, est la polaire du point F; par suite; les points m, n sont con-

jugués par rapport aux points F et R. Écrivons donc

$$\frac{Fn}{nR} = \frac{Fm}{mR}.$$

Ainsi : *Toute ligne droite menée par le centre coupe la courbe en deux points équidistants de* O.

72. — Pour avoir le diamètre conjugué du diamètre OM, qui rencontre la directrice en R, il suffit de mener la droite FR, et, du point O, d'abaisser OP perpendiculaire sur FR.

Or, l'angle RFO est obtus, parce que le point F est entre le pied X de l'axe sur la directrice, et le point O. Il en résulte que, si le diamètre OR vient rencontrer la directrice au-dessus du point O, son conjugué vient la rencontrer au-dessous.

D'après cela, si nous traçons les deux axes de la courbe, nous voyons que, en considérant seulement deux demi-diamètres conjugués, les portions de droites ainsi limitées au centre seront toujours dans deux angles adjacents, parmi les quatre angles formés par les deux axes de la courbe.

73. Théorème. — *Si l'on considère deux points* C, D *tels que* OC, OD *soient conjugués, et que l'on mène les ordonnées des*

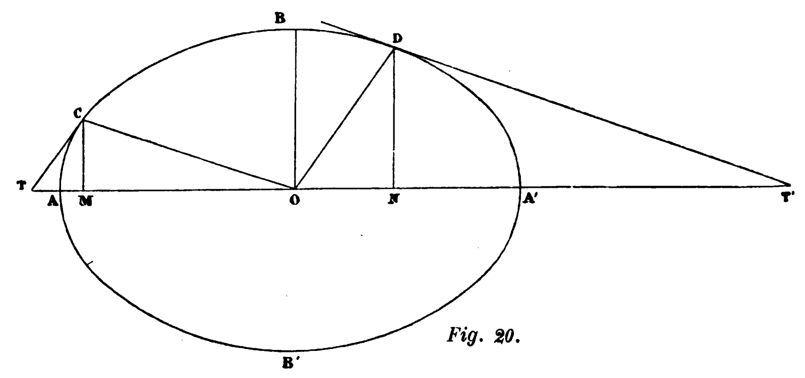


Fig. 20.

points C, D, *la somme des carrés des distances du centre, au pied de ces ordonnées, est égale au carré du demi-grand axe.*

Si l'on construit les tangentes CT et DT′, qui rencontrent l'axe aux points T et T′, on a

$$OM.OT = \overline{OA}^2 = ON.OT';$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad \frac{OM}{ON} = \frac{OT'}{OT}.$$

D'ailleurs, la tangente CT est parallèle au diamètre DD', et la tangente est parallèle au diamètre CC'; car les diamètres CC', DD' sont conjugués. Donc les triangles ODT', OCT sont semblables; et, comme les hauteurs DN, CM sont homologues, on a

$$(2) \qquad \frac{OT'}{OT} = \frac{ON}{TM}.$$

En comparant (1) et (2), on trouve

$$\overline{ON}^2 = OM.TM.$$

Mais $\qquad TM = OT - OM = \dfrac{\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2}{OM};$

donc $\qquad \overline{ON}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OM}^2;$

et, par suite,

$$(A) \qquad \overline{ON}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{OA}^2.$$

74. *Corollaire.* — Si l'on prolonge les tangentes en C et D jusqu'aux points où elles rencontrent l'axe BB', on trouve, de même,

$$(B) \qquad \overline{CM}^2 + \overline{DN}^2 = \overline{OB}^2.$$

75. Théorème. — *La somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante, et égale à la somme des carrés des axes.*

En effet, en ajoutant les deux égalités (A), (B), on a

$$\overline{ON}^2 + \overline{DN}^2 + \overline{OM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2.$$

Or, $\qquad \overline{ON}^2 + \overline{DN}^2 = \overline{OD}^2; \quad \overline{OM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{OC}^2;$

et, finalement,

$$\overline{OD}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \ (*).$$

76. Théorème. — *Si la normale au point* P *rencontre les axes* OA, OB *aux points* G, g, *et le diamètre perpendiculaire à la normale au point* H, *on a*

$$PG \times PH = \overline{BO}^2; \quad Pg \times PH = \overline{AO}^2.$$

(*) Ce théorème et celui que nous donnons plus loin § 78 sont dûs à Apollonius.

Traçons la tangente en P; elle rencontre OA en I, et OB en i. Menons KP perpendiculaire à OA, jusqu'à sa rencontre en K

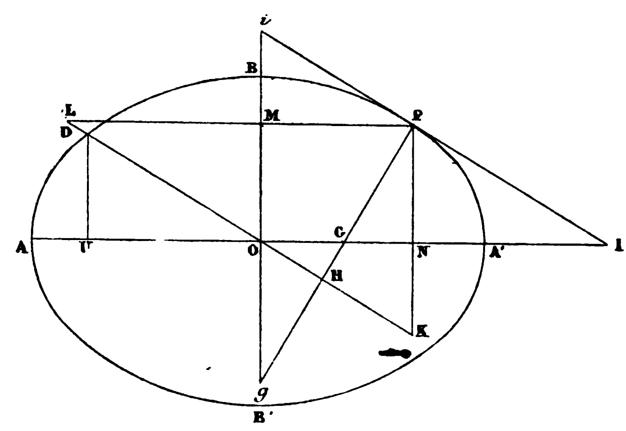


Fig. 21.

avec le diamètre OH, et PL perpendiculaire à BO, jusqu'à sa rencontre avec OH.

Le quadrilatère GHKN est inscriptible et donne

$$PG.PH = PN.PK = OM.Oi = \overline{OB}^2.$$

De même, le quadrilatère inscriptible LMHg donne

$$PH.Pg = PM.PL = ON.OI = \overline{OA}^2.$$

77. Théorème. — *Le rectangle des segments déterminés sur une normale, entre son pied et les deux axes, est équivalent au carré du demi-diamètre perpendiculaire à la normale.*

Soient D l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à la normale, DU l'ordonnée du point D.

Les triangles ODU, PGN sont semblables, puisqu'ils ont leurs côtés rspectivement perpendiculaires. Ainsi

$$\frac{PG}{OD} = \frac{PN}{OU}.$$

Mais nous avons vu que

$$\overline{OU}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{ON}^2 = AN.A'N.$$

D'autre part $$\frac{\overline{PN}^2}{AN.A'N} = \frac{\overline{BO}^2}{AO^2}..$$

On a donc
$$\frac{PN}{OU} = \frac{OB}{OA};$$
et, par suite,

(1)
$$\frac{PG}{OD} = \frac{OB}{OA}.$$

De même, les triangles semblables gPM, ODU donnent

(2)
$$\frac{Pg}{OD} = \frac{PM}{DU} = \frac{OA}{OB}.$$

Les égalités (1), (2) prouvent que
$$\frac{PG}{OD} = \frac{OD}{Pg}.$$

Le théorème énoncé se trouve donc établi.

78. Théorème. — *Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques est équivalent au rectangle construit sur les axes.*

En effet, si nous considérons le parallèlogramme construit sur les demi-diamètres conjugués OP et OD, son aire est égale à OD $\times$ PH, en appelant PH la portion de normale au point P, terminée au diamètre OD.

Or, nous avons, d'après le théorème précédent,
$$\frac{PG}{OB} = \frac{OD}{OA}.$$

Mais
$$\frac{PG}{OB} = \frac{OB}{PH}.$$

On a donc
$$\frac{OD}{OA} = \frac{OB}{PH},$$

ou
$$OD \times PH = OA \times OB.$$

79. Théorème. — *Si la droite* Δ, *tangente en* M, *rencontre les deux axes en* T *et* t, *et si* OD *est le diamètre parallèle à* Δ, *on a :*
$$MT.Mt = \overline{OD}^2.$$

En effet, ayant tracé les ordonnées MN et DU, du point M et du point D, on a :
$$\frac{MT}{DO} = \frac{MN}{DU}.$$

De même, $$\frac{Mt}{DO} = \frac{ON}{OU}.$$

Donc $$\frac{MT.Mt}{\overline{DO}^2} = \frac{MN.ON}{DU.OU}.$$

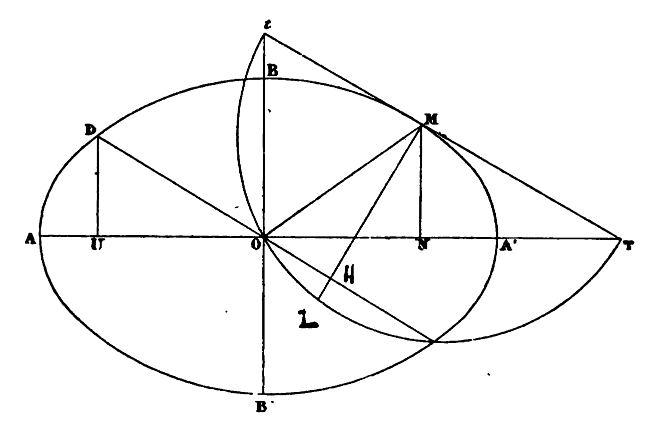


Fig. 22.

Les relations $$\frac{MN}{OU} = \frac{OB}{OA}, \qquad \frac{ON}{DU} = \frac{OA}{OB},$$
prouvent que le second membre est égal à l'unité; finalement
$$MT.Mt = \overline{DO}^2.$$

80. Problème. — *Étant donnés deux diamètres conjugués d'une ellipse, construire les axes.*

Supposons le problème résolu. Soient OA, OB les axes; OM, OD étant les deux diamètres donnés. Par le point M, traçons une parallèle à OD; elle est tangente à la courbe. Elle rencontre les axes en T et t, et nous venons de voir que
$$MT.Mt = \overline{OD}^2.$$

Si, sur Tt comme diamètre, nous décrivons une circonférence, elle passe par le centre; d'autre part, si nous menons ML perpendiculaire à Tt et rencontrant la circonférence en L, nous avons
$$\overline{ML}^2 = MT.Mt = \overline{OD}^2;$$
et, par conséquent, $\quad ML = OD.$

D'après cette observation, du point M, menons MT parallèle à OD et ML égale et perpendiculaire à OD. Puis prenons une circonférence passant par O, L et dont le centre soit sur MT. Elle rencontre MT aux points T, t; les lignes OT, Ot sont les directions des axes.

Pour avoir les longueurs des deux axes, on observe que

$$\overline{OM}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2;$$

$$OD.MH = OA.OB,$$

MH étant la portion de ML comprise entre le point M et le diamètre OD.

Donc, le problème revient à construire les côtés d'un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse et la surface, problème dont la solution graphique est connue. Par suite, les axes de l'ellipse sont connus en grandeur et en position.

(A suivre.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (SAINT-CYR)

Épure du concours de 1890 pour l'admission à l'École spéciale militaire.

Un cône de révolution a pour base sur le plan horizontal un cercle O *de* 50mm *de rayon, tangent à la ligne de terre, et il a une hauteur de* 112mm. *On mène : 1° par le milieu* A *de la génératrice de front (celle de gauche) le plan parallèle au plan tangent au cône suivant la génératrice opposée; 2° la normale au cône en* A *qui rencontre le plan horizontal en* B, *les tangentes* BC *et* BD *au cercle* O, *et enfin les plans* ABC *et* ABD.

On demande de représenter par ses projections le solide commun au cône et au tétraèdre que forment le plan horizontal et les trois plans précédents.

(Durée de la séance : 2 h. 1/2.)

Nous avons construit l'épure à l'échelle $\frac{7}{10}$.

On dessine sans difficulté : les projections de la base du cône et son contour apparent vertical $r's'$, $t's'$; la trace verticale $a'o'$, parallèle à $s't'$, et la trace horizontale $o's$, perpendiculaire à XY, d'une des faces du tétraèdre; la projection

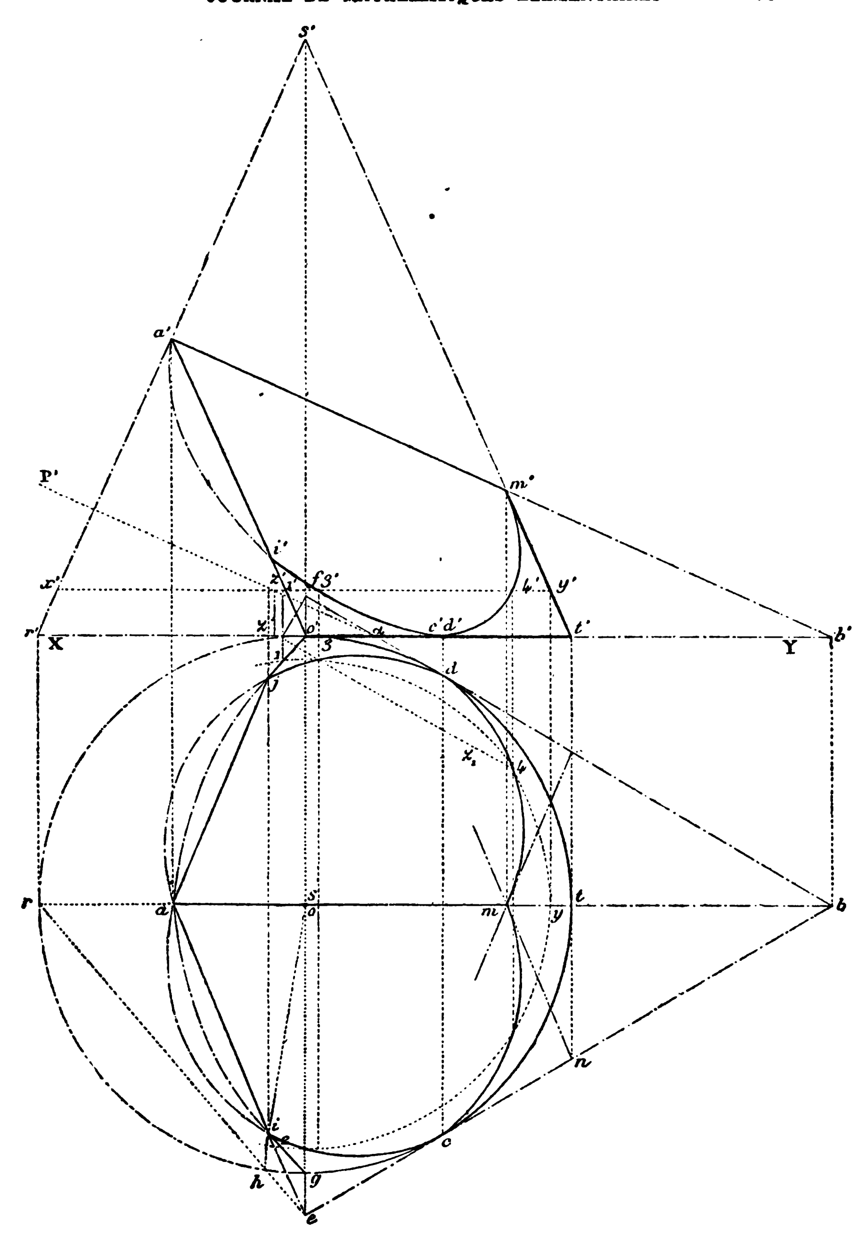
verticale $a'b'$, perpendiculaire à $s'r'$, et la projection horizontale ab, parallèle à xy, de la normale au cône en a, a'; la trace horizontale b de cette normale; les tangentes bc, bd, menées de b au cercle o, et coupant oo' en e et f.

La face du tétraèdre située dans le plan horizontal est bef; prenant cette face pour base, le sommet du tétraèdre est a, a', et ses arêtes latérales sont ab, $a'b'$; ae, $a'o'$; af, $a'o'$.

La face AEF, étant parallèle au plan tangent au cône selon l'arête st, $s't'$, coupe le cône selon une parabole, de sommet a, a', qui se projette verticalement sur la trace verticale $o'a'$ de cette face. L'arête AE coupe le cône au point a, a' et en un second point i, i', que l'on obtient ainsi : on construit la trace horizontale er du plan Q déterminé par l'arête ac, $a'c'$ et la génératrice sr, $s'r'$ du cône; cette trace coupe celle du cône en h; la droite sh, qui est la projection horizontale de la seconde génératrice du cône située dans le plan Q, coupe ac au point i; d'où on déduit i'. On obtient de même le second point j, i' où l'arête AF coupe le cône. La projection horizontale de la parabole section du cône par la face AEF est une parabole, passant par g, i, a, j, o', tangente en a à la ligne de rappel aa'.

La face BAE coupe le cône selon une ellipse, qui passe par le premier point a', a où l'arête AB coupe le cône, et par le second point m', m, que l'on a immédiatement, où cette arête coupe le cône; par le second point i, i' où l'arête AE coupe le cône; par le point c, c' où l'arête BE est tangente au cône. Cette arête BE est tangente à l'ellipse d'intersection en c, c'; de sorte que l'ellipse projection horizontale est tangente en c au cercle base du cône, et que l'ellipse projection verticale est tangente en c' à XY. L'ellipse projection verticale est aussi tangente au contour apparent vertical du cône aux points a' et m'. La tangente en M à l'ellipse de l'espace a pour trace horizontale l'intersection n des traces horizontales du plan sécant ABE, qui contient m, m', et du plan $tt's'$, tangent au cône en m, m'; de sorte que mn est la tangente en m de l'ellipse projection horizontale.

L'ellipse d'intersection du cône et de la face ABF est égale à la précédente; symétrique de celle-ci par rapport au plan de front br; par suite, sa projection verticale est aussi $a'i'c'm'$;


s'
a'
m'
P'
i'
x'
y'
t'
r'
X
Y
b'
d
j
r
a
m
t
b
y
n
i
c
h
g
e

sa projection horizontale *ajdm* est symétrique de *aicm* par rapport à *br*.

Au moyen du plan horizontal $x'y'$, on détermine deux points 1′, 1 et 1′, 2 de la parabole; et deux points 3, 3′ et 4, 4′ de l'ellipse section du cône par la face ABF. Pour obtenir ces points par la méthode générale, on mène, par le point α où la trace horizontale de ce plan coupe xy, la parallèle $\alpha P'$ à $a'b'$: $\alpha P'$ est la trace verticale du plan ABF, parce que ab, $a'b'$ est une droite de front de ce plan.

Nous avons représenté, comme le demande l'énoncé, la portion du cône comprise dans le tétraèdre : ce corps est limité inférieurement par un demi-cercle *o′dtcgo′*, *o′t′*; à gauche par un polygone plan mixtiligne *o′jaigo′*, *a′i′o′*; en avant, sur la droite et en arrière, par des portions de surface conique *gic*, *o′i′c′*; *cmdt*, *c′4′m′t′*; *o′jd*, *o′i′c′*; au-dessus par deux polygones mixtilignes égaux *aicma*, *a′i′c′m′a′*; *ajdma*, *a′i′c′m′a′*.

ERNEST LEBON.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(CONCOURS DE 1890)

Mathématiques élémentaires.

On donne deux droites xOx', yOy', qui se coupent en un point O ; et, sur la première, un point A; sur la seconde, un point B. Une droite mobile rencontre xOx' en M et yOy' en N, et on suppose que la longueur MN est égale à la somme ou à la valeur absolue de la différence des longueurs AM et BN.

1° Démontrer qu'il y a deux séries de droites qui satisfont à cette condition. Trouver combien on peut faire passer de ces droites par un point donné P du plan. Construire ces droites et distinguer, parmi ces droites, celles pour lesquelles la longueur MN est la somme des longueurs AM et BN, de celles pour lesquelles elle en est la différence.

2° Soit MN une droite appartenant à l'une des deux séries; démontrer que le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMN est une conique qui a un foyer au point O, et que l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OMN est un cercle.

BACCALAURÉAT ÈS-SCIENCES COMPLET

ACADÉMIE DE BESANÇON

1. — 1° Définition du jour solaire moyen.

2° On donne, sur une ligne droite Δ, quatre points M, N, P, Q, tels que MN = 30 mètres, NP = 10 mètres, PQ = 20 mètres. Trouver les points de l'espace, tels que A, d'où l'on voit les trois longueurs MN, NP et PQ sous un même angle.

1° Dans un plan Θ passant par Δ il existe seulement deux points tels que A, symétriques par rapport à Δ. En effet, le lieu des points d'où l'on voit MN et NP sous le même angle est, comme on sait, une circonférence ayant son centre sur Δ, passant par N et par le conjugué harmonique de N, par rapport à MP. En appliquant cette remarque successivement aux points M, N, P, d'une part, N, P, Q d'autre part, on voit qu'il y a deux points A′, A″ dans le plan Θ, vérifiant les conditions imposées. Le lieu demandé est la circonférence décrite sur A′A″ comme diamètre.

2. — On donne le côté A d'un triangle équilatéral ABC tournant autour d'une droite Δ', tracée dans son plan et passant par le sommet A.

On demande : 1° de calculer la surface totale S décrite par le périmètre de ce triangle, en fonction de l'angle x du côté AB avec Δ ; 2° pour quelle valeur de x cette surface est maxima ou minima.

L'aire considérée S est égale à deux fois celle qui est engendrée par le côté BC; on trouve, immédiatement, par cette remarque,

$$S = 2\pi a^2\sqrt{3}\,\sin(30 + a), \text{ etc.}$$

3. — Étudier les variations de la fraction

$$\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^4 + 4x^2 + 1}.$$

4. — On donne deux droites, Δ, Δ' se coupant en O sous l'angle Θ ; sur Δ, on donne un point fixe A, et l'on propose de mener par A deux droites rectangulaires déterminant, avec Δ', un triangle ABC d'aire donnée, égale à $\frac{k^2}{2}$.

Appliquer au cas où

$$\Theta = 60^\circ, \qquad k^2 = \frac{7a^2}{\sqrt{2}}.$$

On posera $OA = a$, $OB = x$, $OC = y$.

Projetons A en A′ sur Δ′ et posons

$$AA' = h, \qquad OA' = a'.$$

Nous avons
$$h^2 = (a' - x)(y - a'),$$
et
$$(y - x)h = k^2;$$
ou
$$(y - a') + (a' - x) = \frac{k^2}{h}.$$

Par conséquent $y' - a$, $a' - x$ sont les racines de l'équation :

$$z^2 - \frac{k^2}{h} z + h^2 = 0.$$

Dans l'application numérique proposée, il faut observer que

$$h = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

et l'équation en z est

$$z^2 - \frac{14a}{3} z + \frac{3a^2}{4} = 0, \quad \text{d'où} \quad z' = \frac{9a}{2}, \qquad z'' = \frac{a}{6}, \text{ etc...}$$

ACADÉMIE D'ALGER

1° Un vase métallique doit avoir une capacité de 10 litres. Sa forme est celle d'un tronc de cône dont l'apothème a une longueur de $0^m,10$ et fait, avec le rayon de la base inférieure, un angle de 135°. On demande la longueur du rayon de la base inférieure, ainsi que la forme et les dimensions exactes que l'ouvrier devra donner à la feuille métallique plane, qui, après son enroulement, constituera la paroi latérale du vase.

2° Donner la définition du jour solaire moyen et faire connaître toutes les raisons pour lesquelles on a substitué le jour solaire moyen au jour solaire vrai, pour la mesure du temps.

ACADÉMIE D'AIX (Faculté de Marseille).

1. — 1° Etant donnés deux arcs consécutifs complémentaires, trouver le maximum de la somme de leurs cordes.

2° Les extrémités de ces deux cordes déterminent un triangle. Trouver le maximum de l'aire de ce triangle.

2. — Le rayon d'une circonférence est égal à l'unité; on sait qu'alors le côté du polygone inscrit régulier convexe, de dix côtés, est égal à 0.6180 et l'on demande de calculer les

côtes des polygones inscrit et circonscrit réguliers convexes de vingt côtés.

Ayant trouvé que les côtés de ces polygones sont respectivement égaux à 0,313 et 0,316, on en déduira deux limites entre lesquelles est compris le nombre π, rapport de la circonférence au diamètre.

3. — En joignant les milieux des côtés d'un carré on obtient un second carré. Le démontrer. On opère de même sur ce second carré pour en former un troisième, sur le troisième pour en former un quatrième, etc. Trouver le côté du n^e carré, en fonction du côté du premier carré. La somme des côtés de tous les carrés ainsi formés en nombre infini est égale à 2; quel est le côté du premier carré?

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

MARSEILLE. (Juillet 1890.)

Sur une demi-circonférence, limitée par le diamètre MN, on demande de placer un arc AB, tel que l'angle au centre correspondant ait une valeur donnée α et que la somme des aires des triangles, qui ont pour base commune MN et pour sommets respectifs A et B, soit équivalente au carré construit sur le rayon.

CERTIFICAT D'APTITUDE
A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES
(Juillet 1890.)

1° Détermination de la longitude et de la latitude d'un lieu.

2° On donne deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, et deux points A, A′ sur $x'Ox$, symétriques par rapport au point O, (OA= a).

Trouver le lieu géométrique des points M tels que si l'on mène les droites MA et MA′ qui rencontrent yOy' en P et Q, l'on ait

$$OP \times OQ = b^2,$$

b étant une longueur donnée.

3° m étant un nombre algébrique donné quelconque, trouver les valeurs de x pour lesquelles on a

$$\frac{x}{m} + \frac{m}{x-1} > 1.$$

QUESTION 316

Solution par M. B. SOLLERTINSKY, à Gatschina.

On coupe un prisme triangulaire par tous les plans faisant, avec celui de la section droite, un angle donné. Démontrer que les côtés a, b, c *de l'une quelconque des sections vérifient une relation de la forme*

$$\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{C}c^2 = \mathrm{D},$$

A, B, C, D *étant des constantes.*

(J. Neuberg.)

Soient ABC une section quelconque d'un prisme triangulaire, AB_1C_1 la section droite. On a

$$BC^2 - B_1C_1^2 = (BB_1 - CC_1)^2,$$

d'où $\quad (2BB.CC_1)^2 = (BB_1^2 + CC_1^2 + B_1C_1^2 - BC^2)^2.$

En observant que

$$BB_1^2 = c^2 - c_1^2; \qquad CC_1^2 = b^2 - b_1^2;$$

$$b_1^2 + c_1^2 - a_1^2 = 2b_1c_1 \cos A_1; \qquad (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4b^2c^2 \cos^2 A,$$

on trouve, après avoir supprimé le facteur commun 4,

$$(b^2 - b_1^2)(c^2 - c_1^2)$$

$$= b^2c^2 \cos^2 A - b_1c_1 \cos A_1(b^2 + c^2 - a^2) + b_1^2 c_1^2 \cos^2 A_1.$$

En posant

$$\frac{1}{2}b_1c_1 \sin A_1 = s_1, \qquad \frac{1}{2}bc \sin A = s,$$

on a

$$4s_1^2+4s^2 = b_1c_1 \cos A_1a^2+c_1(c_1-b_1 \cos A_1)b^2+b_1(b_1-c_1 \cos A_1)c^2,$$

ou

$$b_1c_1 \cos A_1a^2 + c_1a_1 \cos B_1b^2 + a_1b_1 \cos Cc^2 = 4s_1^2(1 + \sec^2 \alpha)$$

et enfin

$$(1) \qquad a^2 \cot A_1 + b^2 \cot B_1 + c^2 \cot C_1 = 2s_1(1 + \sec^2 \alpha)$$

où α est l'angle des plans ABC, AB_1C_1.

On voit ainsi que, α étant constant, la seconde partie de la relation (1) est aussi une constante.

Corollaire. — Si h est la hauteur de ABC, issue de A,

on a $$a = h(\cot B + \cot C)$$
d'où $$a^2 = ah(\cot B + \cot C) = 2s(\cot B + \cot C).$$
De même
$$b^2 = 2s(\cot C + \cot A); \quad c^2 = 2s(\cot A + \cot B).$$
Par suite, la relation (1) donne
$$(2) \quad a_1^2 \cot A + b_1^2 \cot B + c_1^2 \cot C = 2s_1(\cos\alpha + \sec\alpha).$$
Donc, d'après une proposition connue (*Mathesis*, t. II, p. 242) :

Si l'on construit, sur une base B'C', *des triangles* A'B'C' *directement ou symétriquement semblables aux sections* ABC *d'un prisme triangulaire, par les plans faisant, avec celui de la section droite, un angle donné, le lieu du sommet* A' *est une circonférence.*

Généralisation. — *Soit* ABC...LM *une section quelconque d'un prisme, par le plan faisant, avec celui de la section droite, un angle donné.*

1° *Les côtés* a, b, c, l, m *de cette section vérifient toujours une relation de la forme*
$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \ldots + \lambda l^2 + \mu m^2 = \nu,$$
$\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda, \mu, \nu$ *étant des constantes.*

2° *Si l'on construit, sur une base fixe* A'B', *un polygone* A'B'C'... L'M', *semblable à* ABC...LM, *les sommets* C',...L',M' *décrivent des circonférences.*

Nota — Nous avons reçu, de M. Boutin, et de M. I. Beyens, une autre solution de cette question.

QUESTION 317

Solution par M. Vazou, professeur au Collège de Saulieu.

Soient une circonférence Δ *et deux diamètres rectangulaires* Δ', Δ''. *D'un point* M, *de* Δ, *on abaisse des perpendiculaires* MP', MP'' *sur ces diamètres : soient* P *le pôle de la droite* P'P'', *par rapport à* Δ, Q, R *ses projections sur* Δ', Δ''. *Démontrer que* QR *est tangente à* Δ.

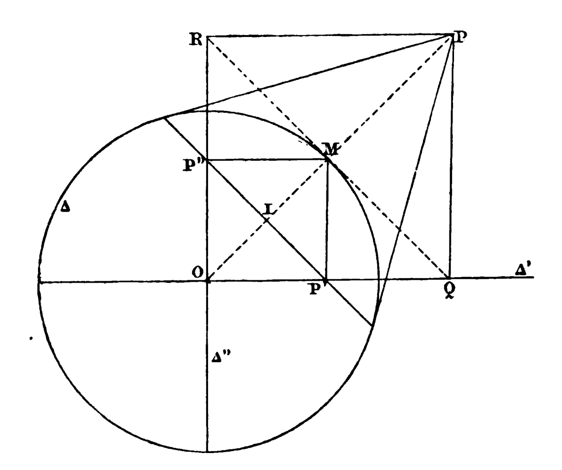
Traçons OP qui rencontre P′P″ au point I; le point P étant le pôle de P′P″ on a

$$OI \times OI = R^2 \text{ (R désignant le rayon du cercle).}$$

Les quadrilatères inscriptibles PIP′Q, et IP″RP nous donnent

$$OP' \times OQ = OI \times OP. = OP''.OR = R^2 = \overline{OM}^2.$$

Ainsi les triangles OMQ, OMR sont rectangles en M; les



trois points R, M, Q sont donc en ligne droite, et RQ touche la circonférence Δ au point M.

NOTA. — Solutions diverses par MM. A. Boutin; de Times; Galban, élève à l'école polytechnique de Madrid; B. J. Sollertinsky, à Gatschina; P. Svéchnicoff, professeur au gymnase de Troïtzk; G. Russo, à Catanzaro.

QUESTION 320

Solution par M. LAVIEUVILLE, professeur au Collège de Dieppe.

Soient AA′, BB′ *deux médianes du triangle* ABC; *démontrer que les cercles décrits sur* AA′ *et* BB′ *comme diamètres ont pour axe radical la hauteur de* ABC *qui correspond au sommet* C.

(S. Rindi.)

Le côté AB étant parallèle à la droite des centres OO′, l'axe radical des deux cercles est perpendiculaire sur AB. Il suffit de démontrer que le point C est d'égale puissance par rapport aux deux cercles.

Pour cela, menons les hauteurs AD et BE et prouvons que l'on a :

$$CD.CA' = CE.CB'.$$

Les deux triangles rectangles semblables ADC, BEC donnent

$$\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{BC} = \frac{2CB'}{2CA'},$$

ou

$$CD.CA' = CE.CB'.$$

C. Q. F. D.

NOTA. — Solutions diverses par MM. G. Russo à Catanzaro; B. S. Sollertinsky, à Gatschina; de Times; Vazou, professeur au collège de Saulieu.

QUESTION 321

Solution par M. B. SOLLERTINSKY, à Gatschina.

Etant donné un triangle ABC, *soit* I *le point de rencontre de la droite* Δ, *conjuguée harmonique de la hauteur* AH *par rapport aux côtés* AB *et* AC, *et de la parallèle menée, par le milieu* M *de* BC, *à la bissectrice* Δ′ *intérieure ou extérieure de l'angle* BAC. *Démontrer que si la perpendiculaire menée par* I *à* BC *coupe* AB *en* B′ *et* AC *en* C′, *on a* BB′ = CC′.

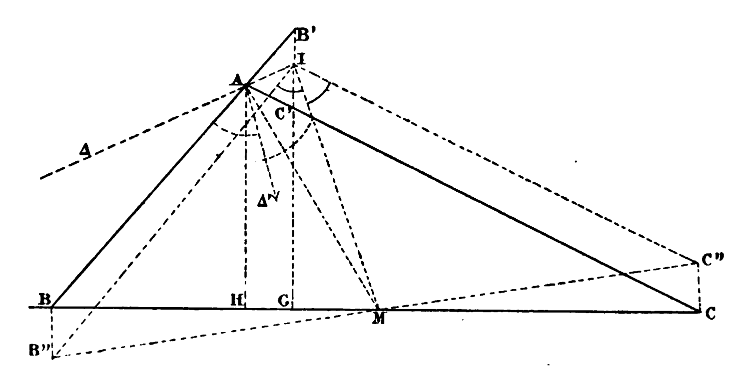
(d'Ocagne.)

On sait que toute parallèle à l'un des rayons d'un faisceau harmonique est partagée en deux parties égales par les trois antres rayons. Donc IB′ = IC′.

Menons BB″, CC″ respectivement équipollents (*) aux seg-

(*) C'est-à-dire que BB″, par exemple, est parallèle à B′I, égal à B′I, et que la direction de B à B″ est la même que celle de B′ à I.

ments B′I, C′I; alors, IB″, IC″ sont équipollents aux segments B′B, C′C. D'ailleurs, BB′, CC″ étant équipollents, B″C″ a son



milieu en M. La droite IM étant la bissectrice de l'angle B″IC″, le triangle B″IC″ est isoscèle, d'où il suit que

$$BB' = CC'.$$

Nota. — Nous avons reçu une autre solution, de cette question, de M. Vazou, professeur au collège de Saulieu.

QUESTION 325

Solution par M. B. Sollertinski, à Gatschina.

Soit μ la droite harmoniquement associée au point M, *par rapport au triangle* ABC. *Les droites joignant un point quelconque de μ à* A, *à* B *et à* C *coupent les pédales correspondantes du point* M *en α, β et γ. Démontrer que les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ passent par les sommets du triangle* ABC.

(M. d'Ocagne.)

Soit M′ un point de μ. Si M′A coupe BC en A′, le point α est conjugué harmonique de M′, par rapport au segment AA′. En effet, M′A est une transversale du faisceau harmonique formé par : μ, la pédale B_1C_1, le côté BC et la droite qui joint au sommet A le point de rencontre de μ avec BC.

D'après cela, α appartient à la droite conjuguée harmonique de CM', par rapport à l'angle ACB. On voit de même que cette conjuguée passe aussi par β. Donc $\alpha\beta$ passe par C.

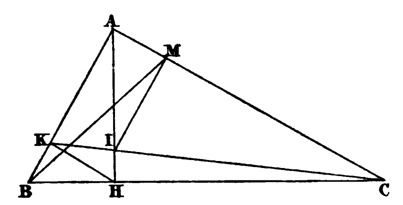
NOTA. — M. A. Boutin nous a communiqué une solution analytique cette de même question.

QUESTION 326

Solution par M. G. LAVIEUVILLE, professeur au Collège de Dieppe.

Soient un triangle rectangle en A, AH *la hauteur issue de* A, HK *la perpendiculaire abaissée de* H *sur* AB. CK *coupe* AH *en* I. *Démontrer que la perpendiculaire abaissée de* I *sur* AC *coupe ce côté au même point que la symédiane issue de* B.

(d'Ocagne.)



Soit M le pied de la perpendiculaire menée du point I sur AC. On a

$$\frac{MC}{MA} = \frac{IC}{IK} = \frac{AC}{KH} = \frac{BC}{BH} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}.$$

Donc BM est la symédiane issue de B.

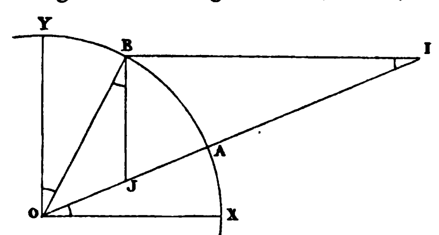
NOTA. — Solutions par M. Svéchnicoff, professeur au gymnase de Troïtzk; de Times; B. Sollertinsky, à Gatschina.

QUESTION 330

Solution par M. GALBAN, élève à l'Ecole polytechnique de Madrid.

Soient OX, OY, *deux rayons rectangulaires dans un cercle* Δ. *Par* O, *on trace deux rayons* OA, OB, *symétriques par rapport à la bissectrice de* YOX. *Par* B, *on mène des parallèles aux droites* OX, OY; *elles rencontrent* OA, *aux points* I, J. *Démontrer que la polaire de* I, *relativement à* Δ, *passe par* J. (G. L.)

L'égalité des angles BOY, AOX, entraîne celle des angles OBJ, BIO. Les triangles OBJ, OIB sont donc équiangles, et l'on a :



$$\frac{JO}{OB} = \frac{OB}{OI},$$

$$OJ.\ OI = OB^2 = \overline{OA}^2.$$

Le point A et le point diamétralement opposé divisent donc harmoniquement le segment IJ. D'où l'on conclut la propriété énoncée.

Nota. — Solutions diverses par MM. B. Sollertinsky à Gastchina; A. Boutin; Svéchnicoff, professeur au gymnase de Troïtzk; Lavieuville, professeur au collège de Dieppe; de Times.

QUESTION 332

Solution par M. Svéchnicoff, professeur au Gymnase de Troïtzk (Russie).

Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x(x-a)(x-b)} + \frac{1}{a(a-x)(a-b)} + \frac{1}{b(b-x)(b-a)} + \frac{1}{\alpha x^2 - abx - \alpha^3} = 0.$$

(G. L.)

Si l'on groupe les trois premiers termes, cette équation revient à

$$\frac{1}{abx} + \frac{1}{\alpha x^2 - abx - \alpha^3} = 0.$$

Si α est nul, l'équation est identique. Si α n'est pas nul; on a, après avoir chassé les dénominateurs, et après avoir divisé par α :

$$x = \pm \alpha.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. A. Boutin, et B. Sollertinsky à Gatschina.

Le Directeur-gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 16312-7-90.

LE THÉORÈME DE FEUERBACH (*)

Par M. **Lauvernay.**

Lemme. — *La droite* IF, *obtenue en joignant le centre du cercle inscrit à un triangle au pied* F *de l'une des hauteurs* AH, *est perpendiculaire à la droite* DK ; D *étant le point de rencontre de la bissectrice de l'angle* A *avec le cercle circonscrit au triangle ;* K *représentant le point de rencontre du rayon du cercle inscrit perpendiculaire à* BC *avec la parallèle à ce côté menée par le point* H', *symétrique de l'orthocentre par rapport à* BC.

Soit M le milieu de BC. On a

$$b^2 - c^2 = 4\text{MB}.\text{MF},$$

ou

$$\frac{\frac{b+c}{2}}{\text{MF}} = \frac{\text{MB}}{\frac{b-c}{2}} = \frac{\text{MB}}{\text{ME}}.$$

Les triangles semblables MDC, E'AI donnent

$$\frac{\text{MD}}{\text{MB}} = \frac{\text{IE}'}{\text{AE}'} = \frac{\text{IE}}{p-a} = \frac{\text{MD}+\text{IE}}{\text{MC}+p-a} = \frac{\text{IL}}{\frac{b+c}{2}}.$$

Des égalités :

$$\frac{\frac{b+c}{2}}{\text{MF}} = \frac{\text{MB}}{\text{ME}}, \qquad \frac{\text{IL}}{\frac{b+c}{2}} = \frac{\text{MD}}{\text{MB}},$$

on déduit

$$\frac{\text{IL}}{\text{MF}} = \frac{\text{MD}}{\text{ME}} = \frac{\text{IL}-\text{MD}}{\text{MF}-\text{ME}} = \frac{\text{IE}}{\text{EF}}.$$

Ainsi, les triangles EMD, EFI sont semblables. Les triangles EMD, GSF, semblables à EIF, et dans lesquels DM = SF, sont égaux. On a donc

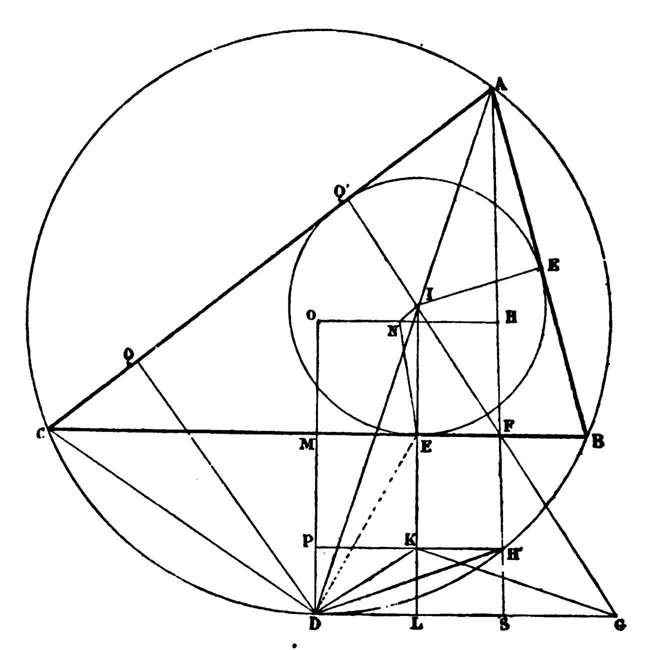
$$\text{DL} = \text{SG}, \qquad \text{DS} = \text{LG}.$$

(*) On trouvera (*Journal*, 1886, p. 3), une autre démonstration de ce théorème célèbre.

Par suite, les triangles GKL, DH'S sont égaux. Ainsi

$$\widehat{KGD} = \widehat{H'DS} = \widehat{DAH'};$$

ce qui prouve que GK est perpendiculaire sur AD. Si l'on con-



sidère alors le triangle DGI, on voit que IK, GK étant deux hauteurs de ce triangle, la troisième hauteur est DK; donc IF est perpendiculaire à DK.

Théorème de Feuerbach. — *Le cercle des neuf points, correspondant à un triangle est tangent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits à ce triangle.*

Soit N le milieu de OH, traçons NI, NE. Dans le triangle ENI, on a :

$$\overline{NI}^2 = \overline{IE}^2 + \overline{NE}^2 - 2IE.\frac{OM + FH}{2} = \overline{IE}^2 + \overline{NE}^2 - IE.OP.$$

Or
$$\overline{NE}^2 - \frac{R^2}{4} = EM.EF;$$



donc $$\overline{NI}^2 = r^2 + \frac{R^2}{4} - EM.EF - r.OP,$$
égalité dans laquelle on a posé $IE = r$.

Les triangles rectangles semblables DKL, IEF, donnent
$$\frac{DL}{KL} = \frac{EM}{PD} = \frac{IE}{EF},$$
puis $$EM.EF = r.PD.$$

Par conséquent,
$$\overline{NL}^2 = r^2 + \frac{R^2}{4} - rR = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2;$$
et, finalement $$NI = \frac{R}{2} - r,$$
égalité qui démontre le théorème de Feuerbach.

On ferait une démonstration analogue pour chacun des cercles ex-inscrits (*).

ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Auguste Morel.**

(*Suite*, voir p. 169.)

IV. — L'Hyperbole.

81. — Lorsque l'excentricité est plus grande que l'unité, la conique prend le nom d'*hyperbole*.

Nous avons déjà reconnu que, dans ce cas, il y a deux sommets réels A, A', situés de part et d'autre de la directrice. L'un d'eux, le sommet A, est situé sur le segment FX; l'autre, le sommet A', est, sur le prolongement de FX, le conjugué de A relativement aux points F, X.

Nous savons aussi que le milieu de AA' est un point par lequel passent tous les diamètres de la courbe, et que ce point

(*) Voir aussi : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e édition, p. 176; *Quelques formules relatives aux triangles rectilignes*, p. 8.
E. C.

est un centre de symétrie de la figure, comme dans l'ellipse. Il résulte de là qu'il existe une seconde directrice $D'D'_1$, symétrique de la première par rapport au centre, et un second foyer F', symétrique de F par rapport au centre.

Nous avons reconnu, précédemment, que la courbe complète se compose de deux branches séparées, rencontrant l'axe AA', l'une au point A, l'autre au point A'; chacune de ces branches est symétrique par rapport à l'axe AA'. Il résulte, de ce que nous venons de dire, que ces deux branches sont, en outre, symétriques l'une de l'autre, par rapport à la perpendiculaire à AA', menée par le milieu de AA'.

On peut observer que chacune des branches est extérieure à la portion du plan limitée par les deux directrices.

82. Théorème. — *La différence des rayons vecteurs d'un point quelconque de l'hyperbole est constante, et égale á* AA' (*).

Soit M un point quelconque de la courbe, pris sur la branche de droite, pour fixer les idées. Menons les rayons vecteurs

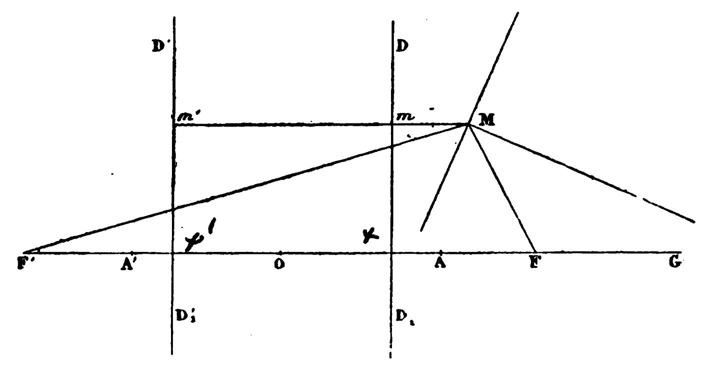


Fig. 23.

FM, F'M de ce point, et la parallèle M*mm'* à l'axe; le point *m* est compris entre M et *m'*, et nous avons

$$\frac{FM}{Mm} = \frac{F'M}{Mm'} = \frac{FA}{AX} = \frac{F'A}{AX'}.$$

(*) Les lettres X, X', oubliées sur la *figure 23*, correspondent aux pieds des directrices situés sur AA'.

Par suite, $$\frac{F'M - FM}{Mm' - Mm} = \frac{F'A - FA}{AX' - AX}.$$

Or $$Mm' - Mm = AX' - AX.$$

Donc,

$$F'M - FM = F'A - FA = FA' - FA = AA'.$$

Si l'on prend le point M sur la branche de gauche, il faut, dans cette démonstration, changer le sens des soustractions.

83. Théorème. — *La rapport de la distance des deux foyers à la distance des deux sommets est égal à l'excentricité.*

En effet, si k désigne l'excentricité, on a

$$k = \frac{FA}{AX} = \frac{F'A}{AX'}.$$

Mais, $$AX' = A'X;$$

Donc $$k = \frac{FA}{AX} = \frac{F'A}{A'X} = \frac{FA + F'A}{AX + A'X}.$$

$$k = \frac{FF'}{AA'}.$$

84. Théorème. — *La normale à l'hyperbole est la bissectrice extérieure de l'angle des deux rayons vecteurs correspondant au pied de la normale.*

Soit M le point pris sur l'hyperbole; la normale en M rencontre l'axe, en G, et l'on a

$$k = \frac{FG}{FM},$$

d'où $$\frac{FG}{FM} = \frac{F'G}{F'M}.$$

D'ailleurs $$k = \frac{FF'}{AA'};$$

par suite, $$\frac{FF'}{AA'} = \frac{F'G - FG}{F'M - FM}.$$

En observant que $F'M - FM = AA'$,

on a $$F'G - FG = FF'.$$

D'après cela, le point G, situé sur le prolongement de FF', partage la ligne FF' en deux segments soustractifs propor-

tionnels aux longueurs FM, F'M. La droite MG est donc la bissectrice de l'angle extérieur du triangle FMF'.

85. Corollaire I. — *La tangente à l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs du point de contact.*

Car la tangente est perpendiculaire à la normale, et, par suite, confondue avec la bissectrice de l'angle des semi-droites MF, MF'.

86. Corrolaire II. —*Si une ellipse et une hyperbole ont les mêmes foyers, les tangentes aux deux courbes, aux points communs, sont rectangulaires.*

Car, aux points communs, les tangentes sont les bissectrices des deux angles formés par les rayons vecteurs; par suite, elles sont rectangulaires.

87. Théorème. — *Le lieu géométrique des projections des foyers sur les tangentes, est la circonférence décrite sur* AA' *comme diamètre.*

Soit MT la tangente en M. Du foyer F, abaissons une per-

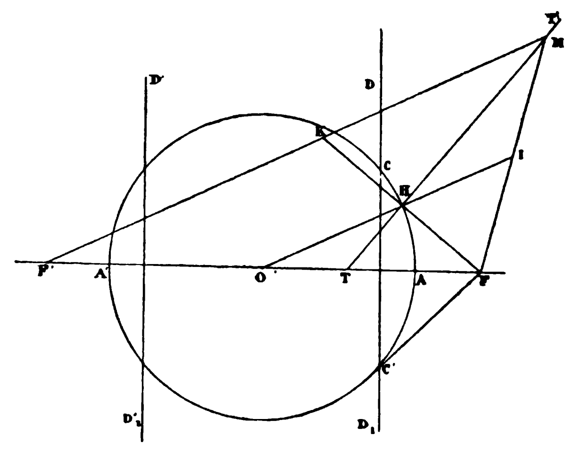


Fig. 24.

pendiculaire FH sur la tangente ; et par le point H, menons HI parallèle à F'M : cette droite rencontre FM en un certain

point I. L'angle HMF′ est égal à MHI; mais il est aussi égal à HMF. Donc, HI est la médiane du triangle rectangle FHM.

Il en résulte que HI passe au point O, milieu de FF′.

De plus, dans le triangle F′FM, OI est la moitié de F′M; et comme HI est la moitié de FM, OH est égal à la moitié de la différence entre les rayons vecteurs. Ainsi OH = OA. Le lieu du point H est donc la circonférence dont le centre est en O, et dont le rayon est égal à OA.

88. — Réciproquement : *Si, par un point fixe* F, *pris à l'extérieur d'un cercle* Δ, *on fait passer un des côtés d'un angle droit dont le sommet parcourt la circonférence, l'autre côté est toujours tangent à une hyperbole, dont l'axe est le diamètre* AA′ *du cercle* Δ, *qui passe par le point* F.

En effet, considérons une position FHT′ de cet angle droit, et menons le rayon OH; puis, par le point F, une droite FI formant avec FH et OH un triangle isoscèle, dont FH soit la base; cette ligne rencontre HT′ en un point M, tel que

$$FM = 2HI.$$

Prenons alors le point F′, symétrique de F par rapport au point O; et traçons F′M.

Dans le triangle F′FM, on a F′M = 2OI. Donc la différence entre FM et F′M est égale au double de la différence HI − OI = 2OH = AA′. Le lieu du point M est donc une hyperbole ayant pour foyers F et F′, et pour sommets les points A, A′. En outre, la droite HM est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs du point M ; c'est donc la tangente, en M, à la courbe.

89. — Cherchons comment se déplace le point de contact sur la courbe, lorsque le point H parcourt, d'un mouvement continu, la circonférence. Nous remarquons d'abord que le côté FH oscille simplement entre deux positions extrêmes, lesquelles sont les tangentes menées, du point F, au cercle AA′. Soient FC et FC′ ces tangentes. Nous supposerons que le point H se déplace : 1° de A en C; 2° de C en A′ et de A′ en C′; 3° de C′ en A.

1° Lorsque le point H est entre le point A et le point C, l'angle

OHF est obtus; par conséquent, le sommet du triangle isoscèle FHI est sur le prolongement de OH, au-delà du point H. Il en résulte que HI est plus petit que OI, et que, par suite, FM est moindre que F'M. Le point de contact se trouve donc sur la branche de courbe la plus voisine du point F, c'est à dire, sur la branche de droite et au-dessus de l'axe.

2° Si le point H se rapproche de C, l'angle OHF diminue et se rapproche d'un angle droit; par suite, l'angle à la base du triangle FHI croît, et le sommet de ce triangle s'éloigne de plus en plus. Enfin, si le point H vient se confondre avec C, le point I s'éloigne à l'infini. Dans ce cas, le côté HT' de l'angle droit, constamment tangent à la courbe en un point M, situé sur FI, de telle façon que FM = 2FI, passe par le centre, et la droite OC, indéfiniment prolongée, peut être considérée comme une position limite de la tangente à la courbe.

3° Lorsque le point H a dépassé le point C, et se trouve sur l'arc CA', l'angle OHF devient aigu; par conséquent le point I est situé sur HO, prolongé au delà du point O, et l'on a OI < HI. Le point M est alors sur la branche de gauche de la courbe, et au-dessous de l'axe. De plus, si le point H revient vers le point C, on voit encore que OC est tangente à cette branche de courbe, le point de contact étant rejeté à l'infini.

Il résulte évidemment, de la symétrie de la figure, que H allant de A' vers C', le point M décrit la portion de courbe située à gauche; mais au-dessus de l'axe, et que, si H se déplace sur l'arc C'A, le point M décrit la portion de la courbe située à droite de la figure, au-dessous de l'axe. De plus, OC' est une portion particulière de la tangente, pour laquelle le point de contact est situé à l'infini.

90. Théorème. — *Le produit des distances des deux foyers à une tangente est constant.*

Soient MHH' la tangente en M, H et H' les projections du foyer sur cette droite. Prolongeons FH jusqu'au point L où elle rencontre le cercle AA', et observons que les sécantes parallèles passant par les points F et F', symétriques par rapport au centre, sont elles-mêmes symétriques par rapport au centre du cercle; par suite FL est égal à F'H'.

Cela posé, on a

$$FH \times FL = FA \times FA' = \overline{OF}^2 - \overline{OA}^2.$$

Si, de F, nous menons la tangente FC, nous avons

$$FH \times FL = \overline{FC}^2.$$

Finalement $$FH.F'H' = \overline{FC}^2.$$

Ainsi la valeur du rectangle constant des distances des foyers à une tangente, est le carré de la tangente menée du foyer au cercle AA'.

91. — Il ne serait pas possible de trouver, sur la perpendiculaire à AA', menée par le centre, un point appartenant à la courbe; nous voyons donc que, si nous appelons diamètre d'une hyperbole une droite passant par le centre, tous les diamètres ne coupent pas la courbe. Nous allons nous proposer de chercher quels sont les diamètres qui rencontrent la courbe; et, en outre, quelles sont les positions relatives de deux diamètres conjugués.

Remarquons d'abord que A_1, A' étant conjugués sur FX, nous avons $$\overline{OA}^2 = OX.OF,$$

ou bien $$\frac{OA}{OX} = \frac{OF}{OA} = k.$$

Le cercle décrit sur AA' comme diamètre est donc le cercle excentrique, relatif au point O. La directrice est la corde des contacts des tangentes menées du point F.

D'après cela, pour trouver les points d'intersection d'une droite OZ avec la courbe, nous prendrons le point Z où elle rencontre la directrice DD', nous le joindrons au foyer; cette ligne FZ coupe le cercle excentrique en deux points n et n'; ayant tracé On et On' et, par le foyer, des parallèles à ces droites, la parallèle FM à On, rencontre OZ au point M, situé sur la courbe.

Ainsi, OZ rencontre l'hyperbole, si FZ coupe la circonférence AA'. Pour cela, il faut que le point Z soit entre C et C'; c'est-à-dire que le diamètre soit compris dans l'angle COC', et, par suite, dans l'angle opposé au sommet. La courbe est donc entièrement située dans ces deux angles.

Considérons maintenant une direction quelconque de cordes de l'hyperbole; soit OY cette direction. Nous savons que, pour avoir le diamètre conjugué, il faut mener à OY une perpendiculaire FZ, rencontrant la directrice en Z, et tracer OZ. Or, si OY est dans l'angle AOC, l'angle YOA étant inférieur à COA, l'angle ZFO, complément du premier, sera supérieur à CFO; donc, le point Z sera au-dessus du point C, et le diamètre OZ sera dans l'angle compris entre OC et la perpendiculaire OB à OA. Par conséquent, si l'on considère les deux demi-diamètres conjugués situés d'un même côté de OB, ou de OA, ils seront tous les deux dans l'angle BOA ou dans l'angle opposé par le sommet, et ils seront séparés l'un de l'autre par la ligne OC. On voit de même que, dans l'angle B'OA, ou dans l'angle opposé par le sommet se trouvent des systèmes de demi diamètres conjugués séparés par la ligne OC', symétrique de OC. De plus, si l'angle YOA augmente, et par suite, si le point Y se rapproche du point C, le point Z se rapproche aussi du point C, de façon que, à la limite, les deux points Y et Z viendront se confondre au point C. Par conséquent, la droite OC possède cette propriété remarquable, d'être le diamètre correspondant à sa propre direction.

92. — Nous savons que, si nous menons une tangente à une conique, le diamètre qui passe par le point de contact est conjugué de la direction de la tangente. Ainsi, pour tracer une tangente parallèle à une direction donnée, il faut que le diamètre correspondant rencontre la courbe; par conséquent, la droite de direction donnée, menée par le centre, ne doit pas rencontrer la courbe en des points réels.

Les droites remarquables OC et OC', dont l'étude nous occupera tout à l'heure plus particulièrement, s'appellent les *asymptotes*. En adoptant cette expression, nous dirons donc que, pour mener une tangente parallèle à une direction donnée, il faut que la parallèle à cette direction, menée par le centre, soit située dans l'angle des asymptotes qui ne contient pas la courbe.

93. — Nous avons indiqué un moyen de construire les asymptotes, en menant du foyer F des tangentes au cercle AA';

les rayons qui passent par les points de contact sont les asymtotes; mais nous pourrions également construire ces droites d'une autre façon.

Par le point A, menons une perpendiculaire à AA′ jusqu'à sa rencontre, en G, avec OC; les triangles rectangles COF, AOG sont égaux puisqu'ils ont un angle aigu égal et un côté de l'angle droit égal. Donc AG = FC. Cela posé, menons au point O une perpendiculaire à AA′, sur laquelle nous prenons de part et d'autre de O, les longueurs OB = OB′ = FC, puis, construisons le rectangle dont les côtés respectivement parallèles aux droites AA′ et BB′ passent par les points A, A′, B, B′. Les diagonales de ce rectangle sont les droites OC et OC′.

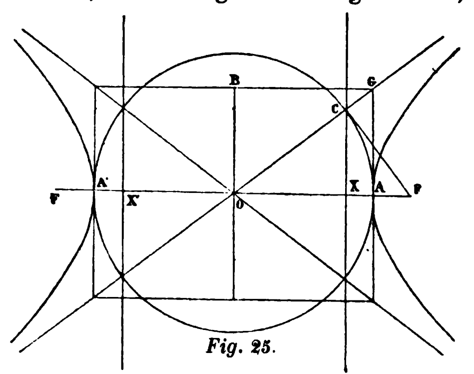


Fig. 25.

BB′ est un axe de symétrie de l'hyperbole, et pour distinguer les axes AA′, BB′ on dit que AA′ est l'axe *transverse :* BB′ s'appelle l'axe *non transverse*. On dit aussi l'axe *imaginaire*.

En résumé, *si l'on construit le rectangle dont les côtés, respectivement parallèles à chacun des axes, passent par les extrémités de l'autre axe, les diagonales de ce rectangle sont les asymptotes de la courbe.*

(A suivre.)

SUR LES TRIANGLES CARACTÉRISÉS

Lorsque les côtés a, b, c d'un triangle vérifient une relation telle que

$$\text{(F)} \qquad \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0,$$

nous convenons de dire, pour rappeler ce fait, que le triangle

considéré est *caractérisé;* les nombres α, β, γ peuvent être appelés *caractéristiques* ou *indices* du triangle (*).

Ainsi, un triangle rectangle a pour caractéristiques $1, -1, -1$; un triangle isoscèle: $0, 1, -1$; etc.

Il n'est pas sans intérêt d'étudier, d'une façon générale, les triangles caractérisés; les résultats acquis pourront ensuite être appliqués à l'un quelconque d'entre eux.

On observera que les caractéristiques ne sont pas de même signe; d'après cette remarque, on peut supposer $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$.

Théorème I. — *Soit* ABC *un triangle caractérisé, dont les indices sont* α, β, γ; *on a*

$$\text{(A)}\quad (\beta + \gamma)\operatorname{cotg}^2 A + (\gamma + \alpha)\operatorname{cotg}^2 B + 2\gamma \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B + \alpha + \beta = 0.$$

En effet, la relation (F) donne

$$\alpha \sin^2 A + \beta \sin^2 B + \gamma \sin^2(A + B) = 0,$$

ou

$$\frac{\alpha}{\sin^2 B} + \frac{\beta}{\sin^2 A} + \gamma (\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A)^2 = 0,$$

ou, encore,

$$\alpha(1 + \operatorname{cotg}^2 B) + \beta(1 + \operatorname{cotg}^2 A) + \gamma(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B)^2 = 0.$$

C'est la relation annoncée entre les cotangentes des angles A, B.

La réciproque du théorème en question est vraie. *Si, entre les cotangentes des angles* A, B *il existe une relation exprimée par l'égalité* (A), *le triangle correspondant est caractérisé, aux indices* α, β, γ.

(*) Un triangle peut être *doublement caractérisé*, si l'on a simultanément

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0, \qquad \alpha' a^2 + \beta' b^2 + \gamma' c^2 = 0;$$

De ces égalités, on déduit

$$\frac{a^2}{\beta\gamma' - \gamma\beta'} = \frac{b^2}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \frac{c^2}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

Par suite, tous les triangles correspondants sont semblables.

Un triangle peut être caractérisé par des relations différentes de celles que nous imaginons ici; par exemple,

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \qquad bc\alpha + ac\beta + ba\gamma = 0, \qquad \text{etc...}$$

Mais, pour l'instant tout au moins, nous nous bornons à quelques remarques sur les triangles caractérisés par l'égalité (F).

On peut observer que la relation (1) est de la forme

$$(A')\quad m\,\text{cotg}^2 A + n\,\text{cotg}^2 B + p\,\text{cotg}\,A\,\text{cotg}\,B + q = 0,$$

avec la condition

$$(A'')\qquad m + n = p + q.$$

Cette relation ne renferme que deux des angles du triangle caractérisé. Celle que nous allons faire connaître maintenant comprend les trois angles A, B, C; elle a, sur la précédente, l'avantage d'être symétrique par rapport à ces lettres.

Théorème II. — *Lorsqu'un triangle est caractérisé, aux indices* α, β, γ, *on a*

$$(B)\quad (\alpha+\beta)\,\text{cotg}^2 C + (\beta+\gamma)\,\text{cotg}^2 A + (\gamma+\alpha)\,\text{cotg}^2 B$$
$$+\alpha\,\text{cotg}\,B\,\text{cotg}\,C + \beta\,\text{cotg}\,C\,\text{cotg}\,A + \gamma\,\text{cotg}\,A\,\text{cotg}\,B + \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

En effet, la relation (A), par permutation circulaire des lettres, donne

$$(\gamma+\alpha)\,\text{cotg}^2 B + (\alpha+\beta)\,\text{cotg}^2 C + 2\alpha\,\text{cotg}\,B\,\text{cotg}\,C + \beta + \gamma = 0,$$
$$(\alpha+\beta)\,\text{cotg}^2 C + (\beta+\gamma)\,\text{cotg}^2 A + 2\beta\,\text{cotg}\,C\,\text{cotg}\,A + \gamma + \alpha = 0,$$
$$(\beta+\gamma)\,\text{cotg}^2 A + (\gamma+\alpha)\,\text{cotg}^2 B + 2\gamma\,\text{cotg}\,A\,\text{cotg}\,B + \alpha + \beta = 0.$$

Ajoutant, on a l'égalité (B).

Théorème III. — Réciproquement, *si la relation* (B) *est donnée entre les angles* A, B, C *d'un triangle, celui-ci est caractérisé, aux indices* α, β, γ.

En effet, de (B), on déduit

$$\sum \alpha \left\{(1+\text{cotg}^2 B)(1+\text{cotg}^2 C) - \text{cotg}^2 B\,\text{cotg}^2 C + \text{cotg}\,B\,\text{cotg}\,C\right\} = 0,$$

ou

$$\sum \alpha \left\{\frac{1}{\sin^2 B \sin^2 C} - \text{cotg}\,B\,\text{cotg}\,C\,(\text{cotg}\,B\,\text{cotg}\,C - 1)\right\}$$
$$= \sum \alpha \left\{\frac{1}{\sin^2 B \sin^2 C} + \frac{\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 B \sin^2 C}\right\}$$
$$= (1 + \cos A \cos B \cos C) \sum \frac{\alpha}{\sin^2 B \sin^2 C} = 0.$$

Finalement $$\sum \alpha \sin^2 A = 0,$$

ou $$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0.$$

Remarque. — En observant que les angles A, B, C d'un triangle vérifient la relation

$$\sum \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = 1,$$

on peut mettre (B) sous la forme remarquable

$$(B') \quad \sum \left\{ (\alpha + \beta) \operatorname{cotg}^2 C + (\alpha + \beta + 2\gamma) \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \right\} = 0.$$

(A suivre.) G. L.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET (*)

PARIS (Avril 1890.)

1. — 1° Étant donnés un cercle de rayon R et un diamètre AB, déterminer sur le cercle un point M, tel que la somme des volumes engendrés par les segments du cercle APM, BP'M tournant autour de AB soit dans un rapport donné m avec le volume engendré par le triangle rectangle AMB tournant autour de la même droite.

2° Étant donné sin a, trouver sin $\frac{a}{2}$, cos $\frac{a}{2}$.

Application au cas où l'on a : $a = 780°$.

2. — 1° Formule des annuités.

2° On coupe un tétraèdre non régulier ABCD par un plan parallèle aux côtés opposés AB et CD.

(a) Démontrer que la section EFGH faite par ce plan dans le tétraèdre est un parallélogramme.

(b) Démontrer que l'expression $\frac{EG}{AB} + \frac{EF}{CD}$ reste constante, quand le plan EFGH se déplace en restant parallèle aux côtés.

(c) Trouver la position du plan pour laquelle la surface du parallélogramme est maximum.

3. — 1° On donne deux circonférences O et O' de rayons R et R'; la distance des centres, égale à d, et une parallèle à OO' menée dans le plan des deux circonférences et à une distance b de OO'. On demande de trouver sur AB un point M tel, qu'en menant les tangentes MT, MT' à O et O', le rapport $\frac{MT}{MT'}$ soit égal à un nombre donné k.

2° Démontrer qu'une fraction dont les termes sont premiers entre eux est irréductible.

(*) Énoncés empruntés au *Journal des examens de la Sorbonne.* (Librairie Croville-Morant, 20 rue de la Sorbonne.)

4. — 1° Construire la distance d'un point à un plan en géométrie descriptive,

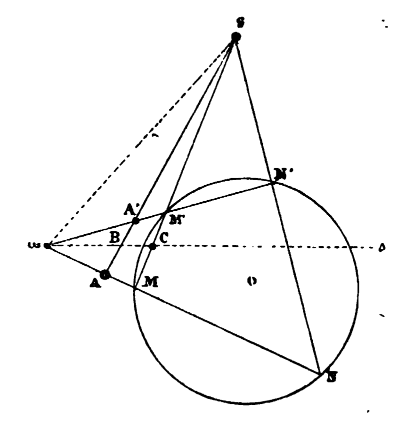
2° Un cône est inscrit à une sphère de rayon R. Trouver le maximum de la surface latérale de ce cône. — Le cône est engendré par la rotation de la corde AB autour du diamètre AD. On prendra comme inconnues $\overline{AB}^2 = x$ et $\overline{BD}^2 = y$.

QUESTION 303

Solution par M. B. SOLLERTINSKY, à Gatschina.

On donne une sphère et un point fixe S. *On coupe la sphère par un plan* (P), *et l'on prend le petit cercle d'intersection, ainsi obtenu, comme directrice d'un cône ayant* S *pour sommet. Ce cône coupe de nouveau la sphère suivant un petit cercle dont le plan est* (Q). *Démontrer que, si l'on fait varier le plan* (P), *de façon qu'il passe par un point fixe, le plan* (Q) *passe aussi toujours par un même point.* (Mannheim.)

Soit A le point fixe par lequel passent les plans (P). En considérant le plan déterminé par le centre de la sphère proposée et par les deux points fixes S, A, on voit que le théorème en question revient à la propriété suivante :



On donne un cercle Γ *et deux points fixes* A, S; *par* A, *on fait passer une transversale qui coupe* Γ *aux points* M, N; *les droites* SM, SN *coupent de nouveau* Γ *aux points* M′, N′ : M′N′ *passe par un point fixe.*

Nous rappellerons, en deux mots, comment on démontre cette proposition bien connue.

La polaire Δ, du point S, passe par le point de concours ω des droites MN, M'N', et le faisceau (ωS, $\omega\Delta$, ωM'N', ωMN) est harmonique. Par conséquent, les quatre points S, A', B, A, communs à ce faisceau et à la droite SA, forment une division harmonique. Les points A, B, S, étant fixes, on voit que A' est lui-même un point fixe.

QUESTION 327

Solution par M. Lavieuville, professeur au collège de Dieppe.

Une circonférence Δ, *passant par le centre* O *d'une autre circonférence* Δ', *coupe celle-ci en* A, B. *Une corde* AM *de* Δ' *rencontre* Δ *en* M'. *Démontrer que* BM' = MM'.

De cette remarque, déduire une solution du problème suivant :

Deux points A, B *étant donnés sur une circonférence* Δ, *trouver, sur* Δ, *un point* M, *tel que* MA + MB *soit égale à une longueur donnée* 2h. (B. Sollertinsky)

1° On a $\widehat{AOB} = \widehat{AM'B} = \widehat{M'MB} + \widehat{MBM'}$.

Or $\widehat{M'MB} = \dfrac{AOB}{2}$;

on a donc aussi

$$\widehat{MBM'} = \frac{\widehat{AOB}}{2};$$

et, par suite,

$$BM' = MM'.$$

2° Du point O, milieu de l'arc AB, comme centre, avec un rayon OA, décrivons la circonférence Δ'; et, du point A comme centre, avec $2h$ pour rayon, décrivons l'arc MM_1 et traçons AM, AM_1. Les points demandés sont M' et M'_1.

Le maximum de $2h$ est le diamètre AOD; on a alors $h = AO$. Il y aura donc *deux*, *une* ou *zéro* solutions, suivant que h sera inférieur, égale ou supérieur à AO.

On voit que le problème revient à construire un triangle AM'B connaissant la base AB, l'angle opposé $\widehat{AM'B} = \widehat{AOB}$ et la somme $2h$ des deux autres côtés; question connue, mais dont la remarque précédente fournit une élégante solution.

Remarque. — Si l'on prenait $MA - MB = 2h$, le segment auxiliaire devrait être capable d'un angle $90° + \frac{AOB}{2}$.

QUESTION 333

Solution par M. Auguste Boutin.

Sur une droite OA, *de longueur* 2d, *on prend des points qui la partagent en* 2n *parties égales. Aux points de division, on applique des forces parallèles, mesurées par les distances de leurs points d'application au point* O. *Ces forces ont même direction, mais sont alternativement dirigées dans un sens et dans l'autre. On demande : 1° l'intensité* R *de la résultante; 2° la distance* x *de son point d'application au point* O. (Moureau.)

1° Si l'on prend pour unité la longueur $\frac{d}{n}$ d'une division, on peut observer que chacune des forces appliquées aux numéros pairs, (en désignant les points de division par $0, 1, 2, \ldots 2n$) surpasse d'une unité la force appliquée au numéro impair précédent. Comme il y en a n de chaque espèce, l'intensité R de la résultante est mesurée par n, c'est-à-dire par la moitié de OA.

2° Si l'on prend les moments par rapport à O, on peut observer que la différence entre les moments de deux forces consécutives est $(2K)^2 - (2K - 1)^2$ ou $4K - 1$. On a donc à faire la somme des n premiers nombres, de la forme $4K - 1$, ce qui donne $d(2n + 1)$ et comme le moment de la résultante est nx, on a

$$x = \frac{2n + 1}{n} d.$$

Ainsi son point d'application est situé sur le prolongement de OA, en un point A′ tel que AA′ soit égal à une des divisions.

Remarque. — On résout la même question par l'application des théorèmes classiques. On a, en effet.

$$R = \frac{d}{n}[2 + 4 + \dots 2n - (1 + 3 + \dots + 2n - 1)]$$
$$= \frac{d}{n}[n(n + 1) - n^2] = d;$$
$$dx = \frac{d^2}{n^2}[2^2 + 4^2 + \dots (2n)^2 - 1^2 - 3^2 \dots - (2n - 1)]^2$$
$$= \frac{d^2}{n^2}\left[\frac{2n(n + 1)(2n + 1)}{3} - \frac{n(4n^2 - 1)}{3}\right];$$

ou, enfin,
$$x = \frac{2n + 1}{n} d.$$

QUESTION 334

Solution par M. de Times.

Un trièdre S, ABC *est tel, que le dièdre suivant* SA *soit droit, de plus on suppose que les faces* BSA, CSA *sont égales.*

En posant BSA = CSA = α, BSC = β.

La formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, appliquée à un triangle rectangle isoscèle, prouve que l'on a :

$$\cos \beta = \cos^2 \alpha.$$

On propose de reconnaître élémentairement, cette relation et d'en déduire la démonstration du théorème suivant :

Si l'on coupe le trièdre considéré par un plan perpendiculaire à l'une des arêtes, le triangle obtenu est rectangle.

1° Si l'on mène un plan perpendiculaire à l'arête SA du dièdre droit, le triangle ABC, formé en joignant les intersections de ce plan avec les arêtes du trièdre, sera rectangle en A, puisque l'angle BAC est l'angle rectiligne correspondant au dièdre droit SA. D'autre part, de l'égalité des triangles SAB, SAC, il résulte que AB = AC : le triangle ABC est à la fois rectangle et isoscèle.

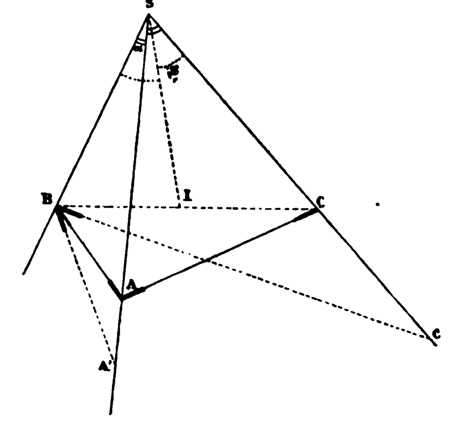
On a donc $$\overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2;$$
ou, si l'on mène la bissectrice SI de l'angle du sommet du triangle BSC,
$$BC = 2BI.$$

D'ailleurs,
$$BI = BS \sin \frac{1}{2}\beta, \qquad AB = BS \sin \alpha.$$

Ces égalités donnent :
$$2 \sin^2 \frac{1}{2}\beta = \sin^2 \alpha,$$
ou
$$2\,\frac{1 - \cos\beta}{2} = 1 - \cos^2 \alpha,$$
ou enfin

(1) $$\cos\beta = \cos^2 \alpha.$$

2° Si l'on coupe le trièdre par un plan perpendiculaire à l'arête SB, par exemple, la section A′BC′ est un triangle rectangle.



Dans les triangles rectangles SBA′, SBC′, on a :
$$SB = SA' \cos\alpha,$$
$$SB = SC' \cos\beta;$$
par suite
$$SA' \cos\alpha = SC' \cos\beta,$$
ou, d'après (1),
$$SA' = SC' \cos\alpha;$$
et cette dernière relation exige que le triangle SA′C′ soit rectangle en A′.

Les plans S′AC′, SA′B étant perpendiculaires, la droite C′A′, située dans le premier et perpendiculaire à leur intersection, est donc perpendiculaire au plan SA′B et, par suite, perpendiculaire à la droite A′B; ainsi le triangle A′BC′ est rectangle.

Nota. — Solutions analogues par M. Lavieuville professeur au collège de Dieppe, et B. Sollertinsky à Gatschina.

QUESTION 335

Solution par M. G. Russo (à Catanzaro, Italie).

Soit yOx *un angle droit. Sur* Oy *on donne un point fixe* A, *par lequel on mène une transversale mobile rencontrant* Ox *en* C *: la bissectrice de* OAC *coupe* Ox *en* D.

1° Démontrer que la perpendiculaire élevée en D, *à* AD, *rencontre* AC *en un point* J *dont le lieu géométrique est une parabole de foyer* A;

2° La perpendiculaire menée par A, *à la transversale* AC, *coupe* Ox *en* B *: la bissectrice de l'angle* ABC *rencontre* AC *en* J *: le lieu de* J *est aussi une parabole de foyer* A;

3° Les droites AD, BJ *se coupent en un point* K *: le lieu de* K *est une ligne droite.* G. L.

1° La proposition énoncée est la conséquence d'une remarque relative au triangle rectangle, que nous démontrerons d'abord. Voici cette proposition :

Soit BAC *un triangle rectangle en* A; *la bissectrice de* BCA *rencontrant* AB *en* D, *on élève, en* D, *à* CD, *une perpendiculaire qui coupe* BC *en* E; *les projections des segments* CD, DE *sur* AB *sont égales.*

En effet, abaissons DH perpendiculaire sur BC; les triangles CAD, CHD sont égaux et donnent DH = DA. D'ailleurs, les angles KDE, EDH sont égaux à la moitié de l'angle C; par suite les triangles KDE, HDE sont égaux. On a donc DH = KD; et, par suite, KD = DA.

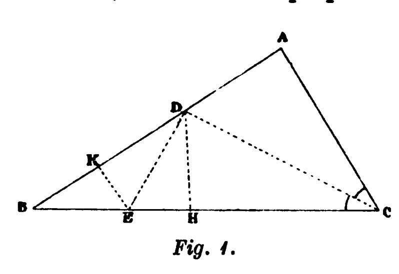


Fig. 1.

Cela posé, la droite AD rencontrant la perpendiculaire IP abaissée de I, sur OX, en un point Q; le triangle AIQ ayant

les angles QAI, AQI égaux, donne IA = IQ. D'ailleurs, d'après la remarque faite tout à l'heure, les triangles OAD, DPQ sont égaux; et PQ = OA.

Ainsi, le lieu du point Q est une droite Δ parallèle à OX et passant par le symétrique de A relativement au point O; on peut donc dire que I, dans son mouvement, est un point également éloigné du point fixe A, et de la droite Δ; le lieu de I, par conséquent, est une parabole ayant A pour foyer, et dont la directrice est la droite Δ, déterminée comme nous l'avons dit.

2° Le point J est, par sa construction même, équidistant

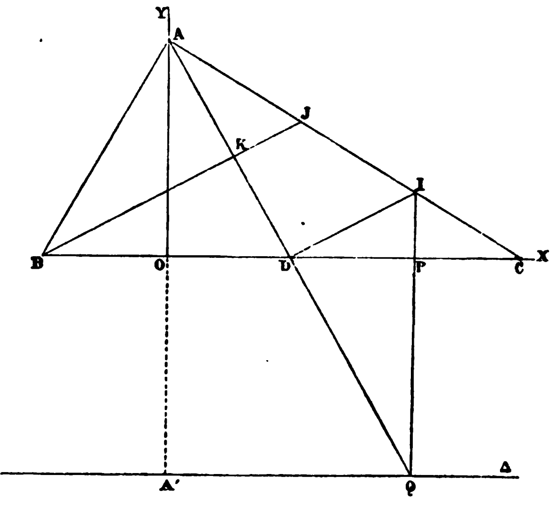


Fig. 2.

de A et de OX; il décrit donc une parabole ayant pour foyer A et pour directrice OX;

3° On voit immédiatement que BJ est parallèle à DI; BK, dans le triangle ABD est donc, tout à la fois, une hauteur et une bissectrice. Ainsi K, est le milieu de AD; et le lieu décrit par K est une perpendiculaire à OA, en son milieu.

NOTA. — Solutions diverses par MM. Galban, à Madrid; Svéchnicoff, professeur au Gymnase de Troïtzk;

QUESTION 336

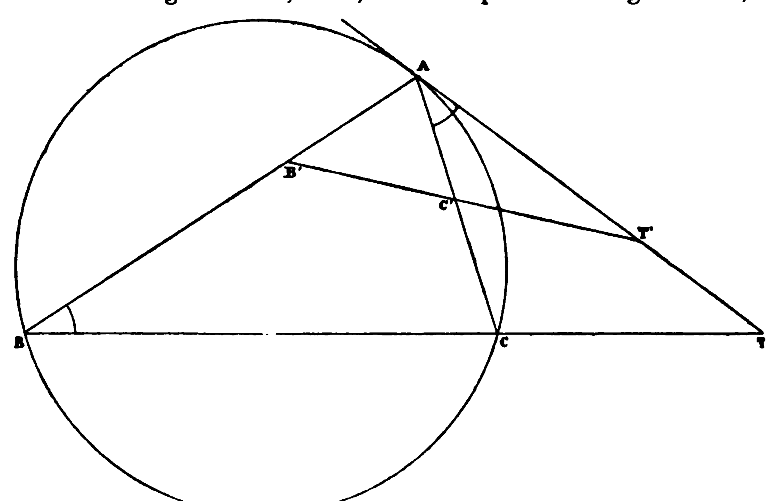
Solution par M. Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix.

Dans un triangle ABC, AT *est la tangente au cercle circonscrit, et une sécante quelconque coupe* AT, AB, AC *en des points* T′, B′, C′. *Démontrer que*

$$\frac{AB}{AC'} - \frac{AC}{AB'} = \frac{BC}{AT'}.$$

(Cl. Thiry.)

Les triangles AC′T′, ABC, dans lesquels les angles ABC,



C′AT′ sont égaux, donnent:

$$\frac{ABC}{AC'T'} = \frac{AB.BC}{AC'.AT'}.$$

On a aussi

$$\frac{AB'C'}{ABC} = \frac{AB'.AC'}{AB.AC}.$$

De ces relations, on déduit

$$(1) \qquad \frac{AB'T'}{ABC} = \frac{AC'.AB'}{AB.AC} + \frac{AC'.AT'}{AB.BC}.$$

Mais $B'AT' = A + B = \pi - C.$

D'après cela, les triangles AB'T', ABC ayant un angle supplémentaire,

$$(2) \qquad \frac{AB'T'}{ABC} = \frac{AB'.AT'}{AC.BC}.$$

Les égalités (1), (2) donnent

$$\frac{AC'.AB'}{AB.AC} + \frac{AC'.AT'}{AB.BC} = \frac{AB'.AT'}{AC.BC},$$

ou $AC'.AB'.BC + AC'.AT'.AC = AB'.AT'.AB.$

En divisant par AB'.AC'.AT', il vient

$$\frac{BC}{AT'} + \frac{AC}{AB'} = \frac{AB}{AC'},$$

d'où, finalement, $$\frac{AB}{AC'} - \frac{AC}{AB'} = \frac{BC}{AT'}.$$

NOTA. — Solutions diverses par MM. G. Russo; B. Sollertinsky.

QUESTION 340

Solution par M. Ém. LEMOINE.

Les côtés de l'angle A *d'un triangle* ABC *sont fixes; le côté* BC *roule sur une courbe donnée* Δ. *Démontrer que l'orthocentre* H *du triangle* ABC, *et le centre* O *du cercle circonscrit, décrivent deux figures symétriquement semblables.* (Neuberg.)

O et H étant des points inverses, AO, AH, font des angles égaux avec la bissectrice de BAC.

HA est le double de la distance OA' de O au côté BC. Le triangle rectangle COA' donne

$$\frac{AH}{CO} = \frac{AH}{AO} = 2 \cos A.$$

Donc, la figure symétrique, par rapport à la bissectrice de l'angle donné A, du lieu décrit par O, est une courbe homothétique au lieu décrit par le point H.

NOTA. — Solution analogue par M. Sollertinsky, à Gatschina.

QUESTIONS PROPOSÉES

371. — Par chacun des sommets du triangle ABC, on mène des perpendiculaires aux deux côtés qui s'y rencontrent. On forme ainsi trois parallélogrammes ayant, chacun, une diagonale extérieure au sommet correspondant du triangle. Démontrer :

1° Que ces trois diagonales passent par le centre du cercle circonscrit à ABC;

2° Qu'elles sont respectivement perpendiculaires aux trois symédianes du triangle.

Corollaire. — Les points où elles rencontrent les symédianes sont les sommets du deuxième triangle de Brocard.

(d'Ocagne.)

372. — Soient AB, BC, CA les directions positives des côtés d'un triangle ABC. Par les sommets, on mène des droites AP, BQ, CR faisant, avec ces directions positives, un même angle α.

Les droites considérées forment un triangle A'B'C'; démontrer :

1° Que le centre du cercle circonscrit à A'B'C' coïncide avec l'orthocentre de ABC;

2° Que tout point remarquable de A'B'C' décrit une circonférence.

Toutes ces circonférences passent par un même point; l'orthocentre de ABC.

Elles constituent un *réseau* de circonférences remarquables relativement au triangle ABC. *(G. L.)*

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

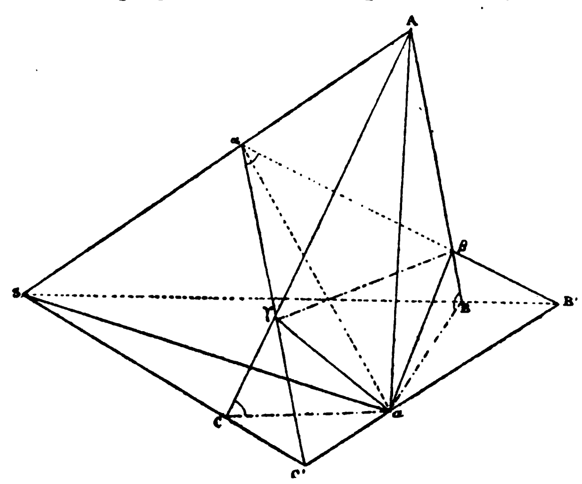
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 18752-9-90.

SUR LE SIXIÈME CAS DE LA RÉSOLUTION DES TRIÈDRES

Par M. **Lauvernay.**

Il s'agit de construire un trièdre, connaissant les trois dièdres.

Prenons, pour plan du tableau, celui de la face BSC, et supposons le problème résolu. Nous pouvons nous donner la droite sur laquelle se trouvera placée l'arête SB, ainsi que la projection a d'un point A de l'arête SA. Mais il reste à déterminer le sommet S et les positions des arêtes SC, SA. De a, menons aB, aC, perpendiculaires, respectivement, *aux droites*



SB, SC; les droites AB, AC, sont perpendiculaires, respectivement, à SB, SC. Le triangle rectangle AaB est donc déterminé. Par suite, Aa est connu; le triangle rectangle AaC l'est aussi. Le plan AaB étant perpendiculaire à la face ASB, si, dans ce plan, on mène $a\beta$ perpendiculaire à leur intersection AB, $a\beta$ est perpendiculaire à la face ASB; de même, la hauteur $a\gamma$ du triangle AaC est perpendiculaire à la face ASC. Par suite, le plan $a\beta\gamma$ est perpendiculaire à SA. Soit α le point

de rencontre de SA avec ce plan : l'angle $\beta\alpha\gamma$ mesure le dièdre SA, et le *quadrilatère bi-rectangle* $a\beta\alpha\gamma$ est déterminé.

D'après ces diverses remarques, pour résoudre le problème en question : 1° on construit le triangle rectangle AaB (on connaît aB et l'angle B); 2° on construit le triangle rectangle AaC (on connaît Aa et l'angle C); 3° on trace les hauteurs $a\beta$, $a\gamma$ de ces triangles, et, avec celles-ci, on forme un triangle dans lequel l'angle compris est π — A; le diamètre de la circonférence circonscrite à ce triangle $a\beta\gamma$ est égal à $a\alpha$; 4° on construit un triangle rectangle égal à ASa (connaissant un côté Aa et la hauteur $a\alpha$); ce qui permet de connaître la longueur Sa et de déterminer le point S, au moyen d'un arc de cercle décrit, de a comme centre, avec un rayon égal à la longueur Sa, trouvée comme nous venons de l'expliquer. On détermine ensuite facilement SA et SC.

Nous laissons au lecteur le soin de faire le tracé de l'épure, et de tirer, de cette construction, les conditions, connues, de possibilité du problème.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE

Par M. **L. Bénézech.**

I. — Soient, dans l'espace, n points quelconques A_1, A_2, ... A_n ($n \geqslant 4$) et une sphère quelconque dont O soit le centre et ρ le rayon. Affectons ces n points $A_1, A_2, \ldots A_n$, de coefficients respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, de façon que le point O soit leur centre des distances proportionnelles. La détermination de ces coefficients sera toujours possible et $n - 3$ d'entre eux pourront être pris arbitrairement (*). Dès lors, d'après un théorème connu, on

(*) Cette possibilité est rendue évidente en observant que les n inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, doivent simplement vérifier les trois équations linéaires et homogènes

$$\alpha_1(x_1 - X) + \alpha_2(x_2 - X) + \ldots + \alpha_n(x_n - X) = 0,$$
$$\alpha_1(y_1 - Y) + \alpha_2(y_2 - Y) + \ldots + \alpha_n(y_n - Y) = 0,$$
$$\alpha_1(z_1 - Z) + \alpha_2(z_2 - Z) + \ldots + \alpha_n(z_n - Z) = 0;$$

dans lesquelles (X, Y, Z), $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n)$ désignent,

a, pour tout point M_1 de l'espace,

$$\alpha_1\overline{M_1A_1}^2 + \alpha_2\overline{M_1A_2}^2 + \ldots + \alpha_n\overline{M_1A_n}^2$$
$$= \alpha_1\overline{OA_1}^2 + \ldots + \alpha_n OA_n^2 + \overline{OM_1}^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

On conclut, de cette relation, que le lieu des points pour lesquels la valeur du premier membre est égale à une constante K^2, est une sphère, dont le rayon OM_1 est donné par la formule : $\overline{OM_1}^2 = \dfrac{K^2 - \alpha_1\overline{OA_1}^2 - \ldots - \alpha_n\overline{OA_n}^2}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$. Or, $n - 3$ des coefficients étant arbitraires, on peut les choisir de telle sorte que

$$\rho^2 = \frac{K^2 - \alpha_1\overline{OA_1}^2 - \ldots - \alpha_n\overline{OA_n}^2}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnés une sphère O *et* n *points quelconques de l'espace,* $A_1, A_2, \ldots A_n$, *on peut toujours déterminer* n *coefficients* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *de façon que le lieu des points* M_1 *qui vérifient la relation :*

$$\alpha_1\overline{M_1A_1}^2 + \alpha_2\overline{M_1A_2}^2 + \ldots + \alpha_n\overline{M_1A_n}^2 = K^2$$

(K^2 étant une constante qui peut être nulle) *soit la sphère* O (*).

II. — Cela posé, prenons, sur la sphère O, $n + 1$ points arbitraires $M_1, M_2, \ldots M_{n+1}$.

En vertu de la proposition précédente, on a

---

respectivement, les coordonnées des points O, $A_1, A_2, \ldots A_n$, par rapport à trois axes de coordonnées. D'ailleurs

$$\begin{vmatrix} x_1 - X & x_2 - X & x_3 - X \\ y_1 - Y & y_2 - Y & y_3 - Y \\ z_1 - Z & z_2 - Z & z_3 - Z \end{vmatrix},$$

par exemple, n'est pas nul, puisque les points $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ ne sont pas tous dans un même plan.

(*) Notons, toutefois, que cette proposition est, en général, en défaut, si l'on suppose, à la fois, $n = 4$, $K^2 = 0$. Dans ce cas particulier, en effet, un seul des coefficients, α_4, par exemple, étant arbitraire et la résolution des équations qui fournissent $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, donnant, pour ces coefficients, des valeurs homogènes en α_4, l'expression $\dfrac{K^2 - \alpha_1\overline{OA_1}^2 \ldots - \alpha_n\overline{OA_n}^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$ est indépendante de α_4 : on n'a donc pas, en général, $\dfrac{K^2 - \alpha_1\overline{OA_1}^2 - \ldots - \alpha_n\overline{OA_n}^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} = \rho^2$.

$$\alpha_1\overline{M_1A_1}^2 + \alpha_2\overline{M_1A_2}^2 + \dots + \alpha_n\overline{M_1A_n}^2 - K^3 = 0,$$
$$\alpha_1\overline{M_2A_1}^2 + \alpha_2\overline{M_2A_2}^2 + \dots + \alpha_n\overline{M_2A_n}^2 - K^3 = 0,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1\overline{M_{n+1}A_1}^2 + \alpha_2\overline{M_{n+1}A_2}^2 + \dots + \alpha_n\overline{M_{n+1}A_n}^2 - K^3 = 0.$$

Si l'on élimine $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, $-K^3$, entre ces $n+1$ équations, il vient

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \dots & \overline{M_1A_n}^2 & 1 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \dots & \overline{M_2A_n}^2 & 1 \\ \vdots & & & & \\ \overline{M_{n+1}A_1}^2 & \overline{M_{n+1}A_2}^2 & \dots & \overline{M_{n+1}A_n}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $n = 4$, l'égalité (1) donne une *relation entre les distances respectives de cinq points d'une sphère, à quatre points quelconques de l'espace.*

III. — La proposition du § 1 donne encore

$$\alpha'_1\overline{M_1A_1}^2 + \alpha'_2\overline{M_1A_2}^2 + \dots + \alpha'_n\overline{M_1A_n}^2 = 0,$$
$$\alpha'_2\overline{M_2A_1}^2 + \alpha'_2\overline{M_2A_2}^2 + \dots + \alpha'_n\overline{M_2A_n}^2 = 0,$$
$$\vdots$$
$$\alpha'_1\overline{M_nA_1}^2 + \alpha'_2\overline{M_nA_2}^2 + \dots + \alpha'_n\overline{M_nA_n}^2 = 0.$$

Par suite,

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \dots & \overline{M_1A_n}^2 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \dots & \overline{M_2A_n}^2 \\ \vdots & & & \\ \overline{M_nA_1}^2 & \overline{M_nA_2}^2 & \dots & \overline{M_nA_n}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette égalité, pour $n = 5$, donne *une relation entre les distances respectives de cinq points d'une sphère, à cinq points quelconques de l'espace.*

En supposant toujours $n = 5$, si l'on admet, de plus, que les points $A_1 A_2 \dots A_5$ coïncident, respectivement, avec les points $M_1 M_2 \dots M_5$, la relation (2) devient:

$$\begin{vmatrix} o & \overline{M_1M_2}^2 & \overline{M_1M_3}^2 & \overline{M_1M_4}^2 & \overline{M_1M_5}^2 \\ \overline{M_2M_1}^2 & o & \overline{M_2M_3}^2 & \overline{M_2M_4}^2 & \overline{M_2M_5}^2 \\ \overline{M_3M_1}^2 & \overline{M_3M_2}^2 & o & \overline{M_3M_4}^2 & \overline{M_3M_5}^2 \\ \overline{M_4M_1}^2 & \overline{M_4M_2}^2 & \overline{M_4M_3}^2 & o & \overline{M_4M_5}^2 \\ \overline{M_5M_1}^2 & \overline{M_5M_2}^2 & \overline{M_5M_3}^2 & \overline{M_5M_4}^2 & o \end{vmatrix} = o,$$

C'est une *relation entre les distances mutuelles de cinq points d'une sphère* (*).

IV. — Lorsque les points $A_1, A_2, \dots A_n$, et le point O, sont dans un même plan, on a le théorème suivant:

Étant donnés n *points* $(n \geqslant 3) A_1, A_2, \dots A_n$, *situés dans un même plan, et une sphère quelconque dont le centre est dans ce plan, on peut toujours déterminer* n *coefficients* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, *de telle sorte que le lieu des points* M_1 *tels que l'on ait :* $\alpha_1\overline{M_1A_1}^2 + \alpha_2\overline{M_1A_2}^2 + \dots + \alpha_n\overline{M_1A_n}^2 = K^2$ (K^2 étant une constante qui peut être nulle), *soit la sphère* O.

On démontrerait cette proposition comme son analogue du § **I**; on prouverait aussi qu'elle est, en général, en défaut pour $n = 3$, $K^2 = o$.

De ce théorème résultent des relations identiques aux égalités (1) et (2). Si l'on suppose que les points $M_1M_2 \dots$ soient situés sur la circonférence déterminée par le plan de ces points et par la sphère O.

1° Pour $n = 3$, l'égalité (1) devient:

$$\begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \overline{M_1A_3}^2 & 1 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \overline{M_2A_3}^2 & 1 \\ \overline{M_3A_1}^2 & \overline{M_3A_2}^2 & \overline{M_3A_3}^2 & 1 \\ \overline{M_4A_1}^2 & \overline{M_4A_2}^2 & \overline{M_4A_3}^2 & 1 \end{vmatrix} = o.$$

(*) Cette relation est attribuée à Feuerbach, qui l'a donnée sous une autre forme. M. Cayley en a donné une démonstration (tome II du *Journal de Cambridge*) qui repose sur l'équation de la sphère et sur la multiplication des déterminants. (Voyez la géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, t. II, p. 546.)

C'est *une relation entre les distances respectives de quatre points d'un cercle, à trois points quelconques de son plan.*

2° En faisant $n = 4$, dans (2), on a :

$$\begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & \overline{M_1A_3}^2 & \overline{M_1A_4}^2 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_2}^2 & \overline{M_2A_3}^2 & \overline{M_2A_4}^2 \\ \overline{M_3A_1}^2 & \overline{M_3A_2}^2 & \overline{M_3A_3}^2 & \overline{M_3A_4}^2 \\ \overline{M_4A_1}^2 & \overline{M_4A_2}^2 & \overline{M_4A_3}^2 & \overline{M_4A_4}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

relation entre les distances respectives de quatre points d'un cercle à quatre points quelconques de son plan (*).

On déduit encore de cette relation, en supposant que A_1, A_2, A_3, A_4 coïncident respectivement avec M_1, M_2, M_3, M_4, *une relation entre les distances mutuelles de quatre points d'un cercle;* c'est-à-dire, le *théorème de Ptolémée.*

V. — Enfin, lorsque les points O, $A_1, A_2, \ldots A_n$ sont sur une même droite, on peut dire que :

Étant donnés n *points* (n $\geqslant$ 2) $A_1, A_2, \ldots A_n$ *situés sur une même droite, et une sphère quelconque dont le centre* O *est sur cette droite, on peut toujours déterminer* n *coefficients* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, *de façon que le lieu des points* M_1 *tels que* $\alpha_1\overline{M_1A_1}^2 + \alpha_2\overline{M_1A_2}^2 + \ldots + \alpha_n\overline{M_1A_n}^2 = K^2$ (K^2 étant une constante qui peut être nulle) *soit la sphère* O.

On démontrerait, comme dans la note du § **I**, que cette proposition est, ordinairement, en défaut, dans le cas particulier où l'on a $n = 2$, $K^2 = 0$.

On déduit, de là, des relations entre les distances respectives de trois points d'une sphère à deux points arbitrairement choisis sur un diamètre quelconque de cette sphère; et aussi, des relations entre les distances respectives de trois points d'une sphère à trois points quelconques d'un diamètre de cette sphère.

Dans le cas où les points $M_1, M_2 \ldots$ sont sur le cercle déterminé par un plan quelconque passant par la droite où sont situés les points $A_1, A_2, \ldots$ et, en supposant $n = 2$, l'égalité (1) donne une *relation entre les distances respectives de trois points*

(*) M. Antomari a établi cette relation par d'autres considérations (Voir *Nouv. Ann.*, 1882).

d'un cercle à deux points pris arbitrairement sur un diamètre quelconque de ce cercle; et en supposant $n = 3$, l'égalité (2) établit une *relation entre les distances respectives de trois points d'un cercle à trois points quelconques d'un diamètre quelconque.*

Remarque. — Nous venons de voir que, étant donnés une sphère et un de ses diamètres, si l'on prend sur la sphère trois points M_1, M_2, M_3 et, sur le diamètre, deux points A_1, A_2, on a

$$\begin{vmatrix} \overline{M_1A_1}^2 & \overline{M_1A_2}^2 & 1 \\ \overline{M_2A_1}^2 & \overline{M_2A_1}^2 & 1 \\ \overline{M_3A_1}^2 & \overline{M_3A_2}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si, maintenant, nous considérons quatre points quelconques de l'espace et trois points quelconques sur une droite arbitraire; on a une relation analogue à la précédente. Dans une autre Note nous reviendrons sur cette propriété, et nous montrerons comment elle peut se déduire d'une proposition plus générale.

ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Auguste Morel.**

(*Suite*, voir p. 195.)

---

94. Théorème. — *Le lieu géométrique du sommet d'un angle droit circonscrit à l'hyperbole, est un cercle concentrique à cette hyperbole.*

On observera d'abord que les foyers de l'hyperbole étant extérieurs au cercle AA′, et les projections des foyers sur une tangente étant sur le cercle AA′, il en résulte que le point M, où se coupent deux tangentes rectangulaires, est situé à l'intérieur du cercle AA′.

Soient K, K′ les projections des foyers sur l'une des tangentes; H, H′ les projections sur l'autre tangente. On a

$$FH = MK, \qquad F'H' = MK'.$$

Or, $$MK.MK' = \overline{OA}^2 - \overline{OM}^2.$$

D'autre part, il résulte des égalités qui précèdent

$$MK.MK' = FH.FH' = \overline{FC}^2,$$

d'où

$$(1) \qquad \overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{FC}^2.$$

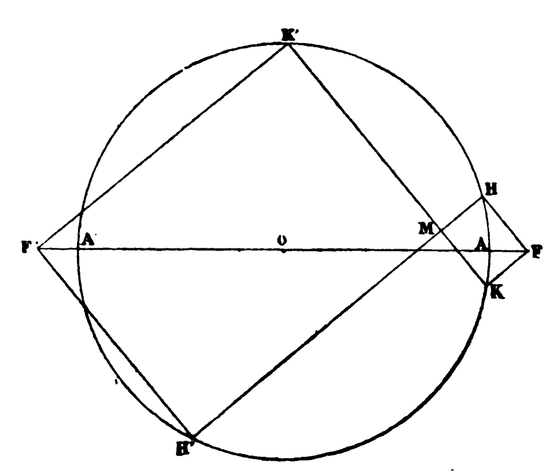


Fig. 26.

En supposant OA > FC, le lieu de M est une circonférence ayant pour centre le point O.

95. Remarque. — L'égalité (1) prouve qu'il n'est pas toujours possible de mener, à une hyperbole, des tangentes rectangulaires.

En effet, si, dans une direction donnée, on peut mener une tangente, la perpendiculaire à cette direction, menée par le foyer, doit rencontrer le cercle AA'; ceci exige qu'elle soit située dans l'intérieur de l'angle CFC' des tangentes issues du point F.

Si l'on considère deux directions rectangulaires, pour qu'il soit possible de tracer des tangentes parallèles à ces directions, il faut que, dans l'intérieur de l'angle CFC', on puisse mener, du point F, deux droites rectangulaires.

Ainsi l'angle CFC' doit être supérieur à un angle droit, et par suite, CFO sera plus grand que 45°. Dès lors, dans le

triangle rectangle CFO, le côté OC doit être supérieur au côté FC. En résumé, c'est seulement dans ce cas, que la différence $\overline{OA}^2 - \overline{FC}^2$ sera positive.

Ce résultat nous donne la limite que ne doit pas dépasser l'excentricité de l'hyperbole pour que l'on puisse mener des tangentes rectangulaires. Cette excentricité est, d'ailleurs, donnée par le rapport de OF à OA. Puisque l'angle COF est inférieur à 45°, la ligne OF est moindre que l'hypoténuse du triangle isoscèle construit sur OA comme côté de l'angle droit. Donc le rapport de OF à OA, ou l'excentricité, doit être inférieure à $\sqrt{2}$.

Dans cette hypothèse, on pourra mener des tangentes rectangulaires à l'hyperbole; et le lieu des points de rencontre de ces tangentes sera un cercle, de centre O. Si l'excentricité est égale à $\sqrt{2}$, le rayon de ce cercle se réduira à zéro; dans ce cas, il n'y aura qu'un point d'où l'on pourra mener à l'hyperbole des tangentes rectangulaires; ce point sera le centre de la courbe et les tangentes correspondantes sont les asymptotes. Enfin, lorsque l'excentricité est supérieure à $\sqrt{2}$, il n'est plus possible de mener de tangentes rectangulaires.

96. Théorème. — *Soient* P *un point de l'hyperbole,* A *et* A′ *les extrémités de l'axe transverse; les droites* PA, PA′ *rencontrent la directrice en* H, H′*; l'angle* HFH′ *est droit.*

Traçons FP, et observons que les droites FA, FP sont également inclinées sur FH.

Cela posé, menons, par le point P, la droite Pp, parallèle à AA′, qui rencontre FH′ au point I, et la directrice au point p. Les parallèles Pp, AA′ étant rencontrées par trois droites concourantes, on a

$$\frac{PI}{Pp} = \frac{A'F}{A'X} = \frac{FP}{Fp};$$

et, par suite,

$$PI = FP.$$

Ainsi, le triangle PFI est isoscèle, et

$$IFP = FIP = IFA.$$

La droite FH′ étant, d'après cela, bissectrice de l'angle A′FP, est perpendiculaire sur FH.

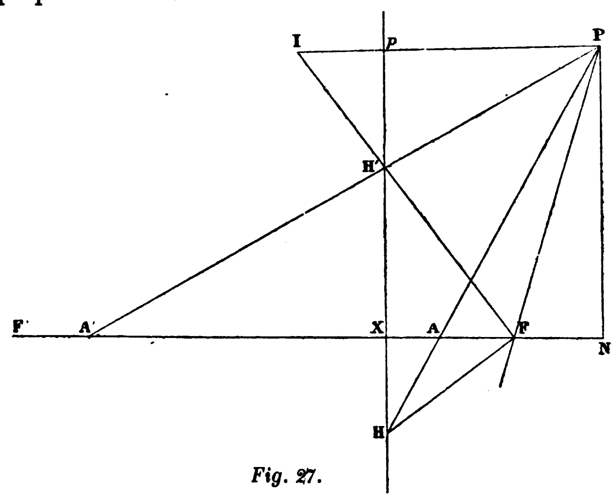


Fig. 27.

97. Théorème. — *Si, d'un point* P *d'une hyperbole, on abaisse une perpendiculaire* PN *sur l'axe, le rapport de* $\overline{PN}^2$ *au rectangle des segments soustractifs* AN *et* A′N, *est constant.*

Les triangles semblables A′PN, A′H′X′ prouvent que

$$\frac{PN}{NA'} = \frac{H'X}{A'X}.$$

De même, les triangles semblables APN, AHX donnent

$$\frac{PN}{NA} = \frac{HX}{AX}.$$

Multipliant, et observant que, d'après le théorème précédent, $HX.H'X = \overline{FX}^2$, où on trouve

$$\frac{\overline{PN}^2}{NA.NA'} = \frac{\overline{FX}^2}{AX.A'X}.$$

Le second membre étant constant, il en est de même du premier.

98. Définition. — Nous avons défini, précédemment, l'axe *transverse* d'une hyperbole et l'axe *non transverse*, et nous avons dit que si, sur l'axe FX, nous prenons les deux som-

mets A et A′, la distance AA′ est l'*axe transverse* de la courbe. Par le milieu O de AA′, élevons, à cette droite, une perpendiculaire; et, sur celle-ci, prenons, de part et d'autre du point O, des longueurs OB, OB′, respectivement égales à la tangente menée du foyer F au cercle décrit sur AA′ comme diamètre : BB′ est l'*axe non transverse* de l'hyperbole.

Cela rappelé, considérons une nouvelle hyperbole, dont les axes sont encore dirigés suivant AA′ et BB′, mais dont l'axe transverse est égal, en grandeur et en direction, à BB′, et l'axe non transverse égal en grandeur et en direction à AA′; cette courbe s'appelle l'*hyperbole conjuguée* de l'hyperbole donnée. Nous signalerons, tout d'abord, les propriétés suivantes de cette hyperbole conjuguée.

Si, par l'un des foyers φ (*) de cette courbe, foyer situé sur la droite BB′, qui contient l'axe transverse, on mène une tangente au cercle décrit sur BB′ comme diamètre, cette tangente est égale, par définition, au demi-axe non traverse. Il en résulte que les deux triangles rectangles OFC, $O\varphi\gamma$ sont égaux, puisqu'ils ont les côtés de l'angle droit égaux chacun à chacun; donc $O\varphi = OF$. *La distance focale est donc la même dans les deux hyperboles conjuguées.*

En second lieu, on sait que si, du foyer, on mène une tangente au cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre, et que l'on joigne le centre au point de contact, on obtient l'asymptote de la courbe. Or, d'après la définition même des hyperboles conjuguées, il en résulte que l'angle $\varphi O\gamma$ est égal à l'angle OFC, ou complémentaire de l'angle FOC. Donc, *les deux hyperboles conjuguées ont les mêmes asymptotes; l'une est située dans deux angles opposés par le sommet, formés par ces asymptotes; l'autre est dans les deux autres angles.*

Enfin, la directrice est la polaire du foyer par rapport au cercle décrit sur l'axe transverse. Il en résulte que, si Y désigne le point de rencontre de l'axe BB′ avec la polaire du point φ, par rapport au cercle BB′, on a

$$OY = FX,$$

et

$$Y\varphi = OX.$$

(*) Voyez la figure 28.

99. — Cela posé, considérons deux diamètres conjugués de la première hyperbole; l'un est dans l'angle FOC, l'autre dans l'angle COB. Le premier, situé dans l'angle des asymptotes qui contient la courbe, rencontre celle-ci : c'est un *diamètre réel*, et l'on en peut trouver l'extrémité H. Son conjugué, situé dans l'angle COB, ne rencontre pas la courbe; c'est un *diamètre imaginaire;* mais, comme il est dans l'angle des asymptotes qui contient l'hyperbole conjuguée, il rencontre cette seconde courbe.

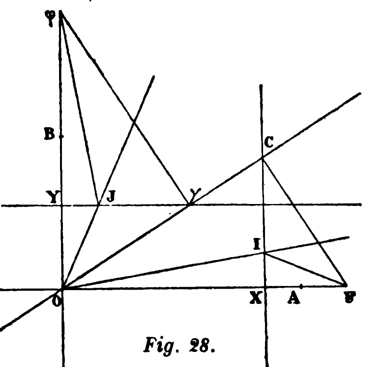


Fig. 28.

Prenons donc le diamètre OK; puis, cherchons son intersection avec l'hyperbole conjuguée, et la direction du diamètre, conjugué de OK, par rapport à cette hyperbole.

On déterminera le point K, de rencontre de la courbe et du diamètre, par la méthode ordinaire.

En outre, si l'on cherche le conjugué de OK, dans la seconde hyperbole, on retrouvera OH.

En effet, reprenons la construction qui a donné OK, au moyen de OA. Du point F, nous avons mené une perpendiculaire à OH; elle a coupé la directrice en L; OKL est le diamètre conjugué de OH. Celui-ci rencontre la directrice en I, de telle façon que FI est perpendiculaire sur OL. Ainsi, les deux angles OFI et φOL sont égaux.

D'après cela, si l'on suppose que le diamètre OKL rencontre en J la directrice de l'hyperbole conjuguée, les deux triangles rectangles FIX, OJY sont égaux, puisqu'ils ont un angle aigu égal et un côté de l'angle droit égal. Donc IX $=$ JY, et les triangles FIO, OJφ sont égaux. Ainsi φJ est perpendiculaire sur OI; par suite, OI est conjugué de OL. Concluons donc :

Les deux hyperboles conjuguées admettent les mêmes systèmes de diamètres conjugués; et, si l'on considère deux diamètres conjugués, le diamètre réel de l'une des courbes est un diamètre imaginaire de l'autre; et réciproquement.

Cela posé, nous convenons d'appeler *extrémité* d'un diamètre imaginaire de l'hyperbole le point où ce diamètre rencontre l'hyperbole conjuguée; la distance du centre (commun aux deux hyperboles) à l'extrémité de ce diamètre étant la *demi longueur* du diamètre imaginaire.

100. Théorème. — *Si, d'un point quelconque* Q *de l'une des asymptotes, on mène* QPN, *perpendiculaire sur l'axe transverse et rencontrant l'hyperbole aux points* P, p, *on a*

$$QP.Qp = \overline{OB}^2.$$

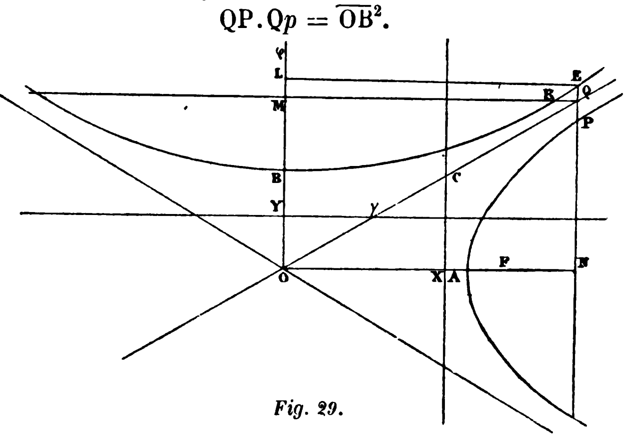


Fig. 29.

La droite Pp ayant son milieu en N, sur l'axe transverse, on a

$$QP.Qp = \overline{QN}^2 - \overline{PN}^2.$$

D'ailleurs, les triangles semblables QNO, IAO donnent

$$\frac{\overline{QN}^2}{\overline{AI}^2} = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OA}^2};$$

et, par suite, en remplaçant AI par son égal OB,

$$\frac{\overline{QN}^2 - \overline{OB}^2}{\overline{OB}^2} = \frac{\overline{ON}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OA}^2}.$$

D'autre part, $$\frac{\overline{PN}^2}{NA.NA'} = \frac{\overline{FX}^2}{AX.A'X},$$

égalité qu'on peut écrire ainsi, en observant que C appartient au cercle AA':

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{ON}^2 - \overline{OA}^2} = \frac{\overline{FX}^2}{\overline{CX}^2}.$$

Or, des triangles semblables FCX, OAI, on déduit

$$\frac{\overline{FX}^2}{\overline{CX}^2} = \frac{\overline{AI}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OA}^2}.$$

Nous avons donc $\dfrac{\overline{PN}^2}{\overline{ON}^2 - \overline{OA}^2} = \dfrac{\overline{OB}^2}{\overline{OA}^2}$,

et, par suite,

$$\frac{\overline{QN}^2 - \overline{OB}^2}{\overline{OB}^2} = \frac{\overline{ON}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{\overline{PN}^2}{\overline{OB}^2}.$$

En comparant le premier et le troisième rapport, on trouve

$$\overline{QN}^2 - \overline{PN}^2 = \overline{OB}^2;$$

ce qui démontre le théorème.

101. Corollaire I. — Nous avons vu que, dans l'hyperbole conjuguée, l'axe réel de l'une des hyperboles est l'axe imaginaire de l'autre; et inversement. Si donc, du point Q, on mène la droite QRM, perpendiculaire à l'axe imaginaire OB, et rencontrant cet axe en M, et l'hyperbole conjuguée en R, on a, de même,

$$\overline{QM}^2 - \overline{MR}^2 = \overline{OA}^2.$$

102. Corollaire II. — Prolongeons NQ jusqu'en E, point où cette droite rencontre l'hyperbole conjuguée; puis, du point E, menons EL perpendiculaire à OB. On a :

$$\frac{\overline{EL}^2}{\overline{EN}^2 - \overline{OB}^2} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2},$$

ou

$$\frac{\overline{EN}^2 - \overline{OB}^2}{\overline{OB}^2} = \frac{\overline{EL}^2}{\overline{OA}^2}.$$

D'autre part, $\dfrac{\overline{QN}^2 - \overline{OB}^2}{\overline{OB}^2} = \dfrac{\overline{ON}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OA}^2}$;

ou, ON étant égal à EL,

$$\frac{\overline{QN}^2 - \overline{OB}^2}{\overline{OB}^2} = \frac{\overline{EL}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OA}^2}.$$

De cette proportion et de la précédente, on tire.

$$\frac{\overline{EN}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OB}^2} = \frac{\overline{QN}^2}{\overline{OA}^2} = 1;$$

et, finalement, $$EN^2 - \overline{QN}^2 = \overline{OB}^2.$$

Ainsi :

Une perpendiculaire à l'un des axes rencontrant l'une des hyperboles en deux points V, v, *et une des asymptotes en un point* Q, *le produit des distances du point* Q *aux deux points* V, v *est égal au carré de l'autre demi-axe.*

103. Théorème. — *Si une droite rencontre une hyperbole*

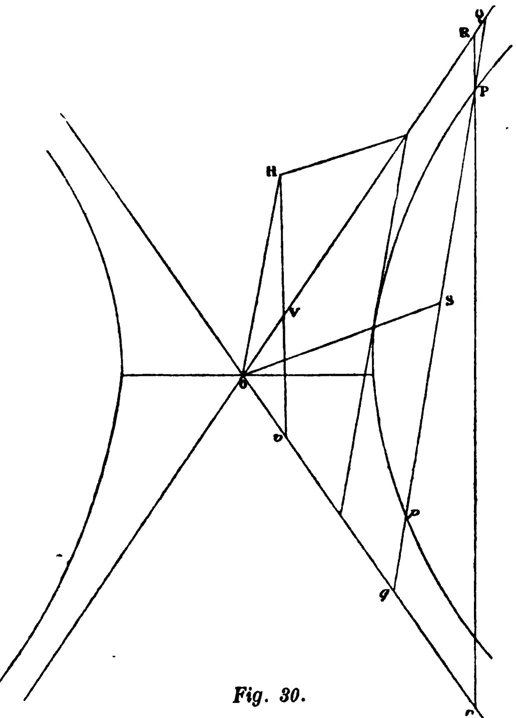


Fig. 30.

en deux points P, p, *et les asymptotes en* Q, q ; *si, d'autre part,* OH *est le demi diamètre parallèle à* Pp ; 1° *on a :*

$$QP.PQ = \overline{OH}^2;$$

2° *les segments* QP, qp *sont égaux.*

Menons, par P, une droite RPr, perpendiculaire à l'axe transverse de l'hyperbole, et, par H, une perpendiculaire à l'axe transverse, rencontrant les asymptotes en V et v.

Des triangles semblables PQR, HOV, on déduit

$$\frac{PQ}{OH} = \frac{PR}{HV}.$$

De même, les triangles semblables Pqr, HOv donnent

$$\frac{Pq}{OH} = \frac{Pr}{Hv}.$$

On tire de là

$$(1) \qquad \frac{PQ.Pq}{\overline{OH}^2} = \frac{PR.Pr}{HV.Hv}.$$

Or, d'après le théorème précédent, le point P étant un point de l'une des hyperboles, et le point H un point de l'hyperbole conjuguée, on a

$$PR.Pr = OB^2 = HV.Hv.$$

Ainsi, le second membre de (1) est égal à l'unité; on a donc

$$PQ.Pq = \overline{OH}^2.$$

On trouve, de même, $pq.pQ = \overline{OH}^2$;

et, par suite, $PQ.Pq = pq.pQ$.

Soit S le milieu de Qq; alors le premier membre de cette égalité est égal à $\overline{QS}^2 - \overline{PS}^2$; de même le second membre est égal à $\overline{QS}^2 - \overline{pS}^2$. Il résulte, de là, que le milieu de Qq est aussi le milieu de Pp; on a donc

$$QP = pq.$$

(A suivre.)

GÉNÉRALISATION D'UN PROBLÈME (*)

DONNÉ AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE DE SAINT-CYR EN 1890

Par M. **J. Nalis**, élève de Philosophie au Lycée Louis-le-Grand (Sainte-Barbe).

La question posée était la suivante :

On donne deux droites rectangulaires et leur perpendiculaire commune IK. *On prend, sur ces droites, deux points mobiles* A *et* B, *tels que la longueur* AB *soit invariable.*

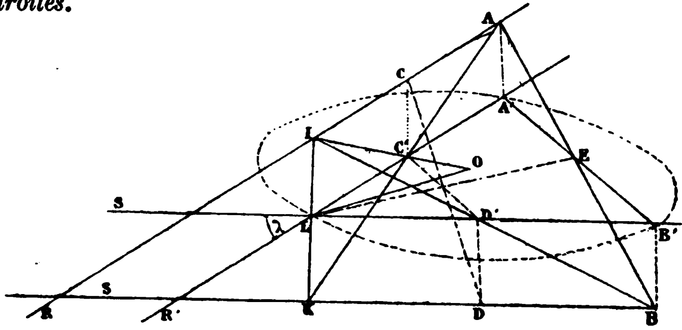
(*) Ce problème est traité, en partie, dans le *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, de M. Catalan. (Seconde édition, p. 617.)

1° La somme des carrés des six arêtes du tétraèdre ABIK *est invariable.*

2° Le rayon de la sphère circonscrite à ce tétraèdre est invariable.

3° Chacune des droites qui joignent les milieux des arêtes opposées est invariable.

4° Trouver le lieu décrit par le point de concours de ces trois droites.



Il est intéressant d'observer que la propriété du n° 2, et une partie de celle du n° 3 subsistent si l'on ne suppose pas que les droites données soient rectangulaires.

En effet : par le milieu L de la droite IK, nous menons un plan P parallèle aux deux droites, que nous désignerons par R et S. La droite R, passant par I, se projetera suivant une droite parallèle R', et la droite S, passant par K, suivant une droite S'.

Remarquons d'abord que la projection A'B' de AB est constante ; car c'est un côté de l'angle droit d'un triangle dont l'autre côté adjacent à l'angle droit est égal à IK, et dont l'hypoténuse est égale à AB.

Cherchons le centre de la sphère circonscrite. Nous l'obtiendrons en menant les plans perpendiculaires aux milieux des arêtes IK, IA et KB. Le premier de ces plans est P. Le deuxième et le troisième, étant respectivement perpendiculaires aux droites R et S, seront perpendiculaires à R' et S', qui sont parallèles à ces droites, et passeront par les points C' et D', projections des milieux C et D des arêtes IA et KB. Leurs traces, dans le plan P, seraient donc les perpendiculaires élevées en C', D' à LA', LB'. Le centre O cherché sera au point

d'intersection de ces traces. Or, C′ est le milieu de LA′, et O′ est le milieu de LB′. Le point O est donc le centre du cercle circonscrit au triangle LA′B′. Ce cercle a un rayon constant, car il est complètement déterminé, en grandeur, par la base A′B′ et par l'angle au sommet L du triangle LA′B′. Il en résulte que le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre est constant, car ce rayon est l'hypoténuse d'un triangle dont les petits côtés sont, d'une part, le rayon du cercle circonscrit au triangle LA′B′, de l'autre, la distance des droites R, S au plan P.

La valeur de ce rayon est, si on appelle λ l'angle des droites R, S :

$$OI = \sqrt{\frac{\overline{IK}^2}{4} + \overline{OI'}^2} = \sqrt{\frac{\overline{IK}^2}{4} + \frac{\overline{A'B'}^2}{4\sin^2\lambda}}$$
$$= \sqrt{\frac{\overline{IK}^2}{4} + \frac{\overline{AB}^2 - \overline{IK}^2}{4\sin^2\lambda}} = \frac{\sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{IK}^2\cos^2\lambda}}{2\sin\lambda}.$$

Les arêtes IB, KA, ont leurs milieux en C′, D′. Ces points sont aussi, comme nous venons de le voir, les milieux des droites LA′, LB′; la droite C′D′ est donc égale à la moitié de A′B′ : elle est donc constante.

Enfin la droite CD, qui a pour projection C′D′, est constante, car elle est l'hypoténuse d'un triangle dont les deux autres côtés sont constants et égaux à IK et C′D′.

Quant à la droite LE, elle n'est constante que dans le cas où les droites R et S sont rectangulaires. Dans tout autre cas, en effet, le point E décrit une ellipse dont le centre est le point L. Enfin, le lieu du point de rencontre G, des médianes, est homothétique, par rapport à L, au lieu décrit par le point E.

SUR LES TRIANGLES CARACTÉRISÉS

(*Suite*, voir p. 203.)

Théorème IV. — *Lorsqu'un triangle est caractérisé, aux indices α, β, γ, on a*

$$\sum(\beta + \gamma)\operatorname{cotg} A = 0.$$

Les relations indiquées dans les paragraphes précédents peuvent être considérés comme des conséquences d'une formule plus simple que nous allons établir, et de la relation connue

$$\sum \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = 1.$$

Les égalités :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$
étant multipliées, respectivement, par $\beta + \gamma$, $\gamma + \alpha$, $\alpha + \beta$ donnent

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = \Sigma(\beta + \gamma)bc \cos A.$$

Mais on suppose

(F) $$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0;$$

on a donc
$$\sum(\beta + \gamma)bc \cos A = 0,$$
ou
$$\sum(\beta + \gamma)\frac{\cos A}{a} = 0,$$
ou, enfin

(F') $$\sum(\beta + \gamma) \operatorname{cotg} A = 0.$$

C'est la relation que nous avions en vue.

Théorème V. — Réciproquement, *si la relation* (F') *a lieu entre les angles d'un triangle, celui-ci est caractérisé, aux indices* α, β, γ.

Cette réciproque s'établit, sans difficulté, en remontant de la relation (F') à l'égalité (F).

On peut d'ailleurs passer de (F) à (F'), et vice versa, de diverses manières. En voici deux exemples :

1° On a d'abord

$$\alpha \sin^2 A + \beta \sin^2 B + \gamma \sin^2 C = 0;$$

et, par conséquent,
$$\sum \alpha \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = 0,$$
ou
$$\sum \alpha \cdot \frac{\sin(B + C)}{\sin B \sin C} = 0.$$

On a donc
$$\sum \alpha(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C) = 0.$$

C'est, sous une autre forme, la relation (F').

2° En désignant par h la hauteur, associée au côté a, et par s l'aire du triangle correspondant, l'égalité

$$a = h(\text{cotg } B + \text{cotg } C),$$

donne
$$a^2 = 2s(\text{cotg } B + \text{cotg } C).$$

On a donc
$$\sum \alpha(\text{cotg } B + \text{cotg } C) = 0.$$

Théorème VI. — *Lorsqu'un triangle* ABC *est caractérisé, aux indices* α, β, γ; *les triangles qui ont pour sommets deux de ses sommets et le centre de gravité* G *sont caractérisés*; *les indices sont* (*)

$$\alpha - 2\beta - 2\gamma, \qquad 3(\gamma + 2\beta), \qquad 3(\beta + 2\gamma)$$

pour GBC, *etc...*

En effet, les relations :

$$9\overline{GB}^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2,$$
$$9\overline{GB}^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2;$$

et l'égalité
$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0,$$

donnent

$$(1) \quad (\alpha - 2\beta - 2\gamma)\overline{BC}^2 + 3(\gamma + 2\beta)\overline{GC}^2 + 3(\beta + 2\gamma)\overline{GB}^2 = 0.$$

La réciproque est vraie.

Application. — *Lorsque, dans un triangle* ABC, *les médianes correspondant aux sommets* B, C *sont rectangulaires*, ABC *est un triangle caractérisé, aux indices* 5, -1, -1.

En effet, si GBC est un triangle rectangle, on a

$$(2) \qquad \overline{BC}^2 - \overline{GC}^2 - \overline{GB}^2 = 0.$$

Les égalités (1), (2) doivent avoir lieu, pour une infinité de valeurs des quantités BC, GC, GB ; il faut donc que l'on ait

$$\alpha - 2\beta - 2\gamma = -3(\gamma + 2\beta) = -3(\beta + 2\gamma);$$

puis
$$\alpha = -5\beta = -5\gamma.$$

Réciproquement, *si un triangle* ABC *est caractérisé, aux indices*

(*) Pour éviter toute ambiguïté, lorsqu'un triangle est caractérisé, les sommets étant lus dans un certain ordre, les indices sont écrits dans l'ordre qui correspond aux sommets en question. Ainsi le triangle étant GBC, les indices s'énoncent dans l'ordre qui correspond aux côtés BC, CG, GB.

5, — 1, — 1 *les médianes issues des sommets* B, C *sont rectangulaires* (*).

Cela résulte immédiatement de l'égalité (1).

Théorème VII. — *Lorsqu'un triangle* ABC *est caractérisé, aux indices* α, β, γ, *le triangle que l'on peut construire avec les médianes est caractérisé aux indices*

$$2\beta + 2\gamma - \alpha, \quad 2\gamma + 2\alpha - \beta, \quad 2\alpha + 2\beta - \gamma.$$

Soient m, m', m'' les médianes de ABC. Les relations

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2},$$

$$c^2 + a^2 = 2m'^2 + \frac{b^2}{2},$$

$$a^2 + b^2 = 2m''^2 + \frac{c^2}{2},$$

et l'égalité proposée

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0,$$

donnent

$$m^2(2\beta + 2\gamma - \alpha) + m'^2(2\gamma + 2\alpha - \beta) + m''^2(2\alpha + 2\beta - \gamma) = 0.$$

Cette relation établit la proposition énoncée; la réciproque est vraie.

Remarque. — Si nous appliquons cette proposition au triangle caractérisé aux indices 5, — 1, — 1, nous avons

$$m^2 = m'^2 + m''^2.$$

Ainsi : *étant donné un triangle caractérisé, aux indices* 5 — 1, — 1, *le triangle construit avec les médianes est rectangle*, etc.

(A suivre.) G. L.

(*) Ce triangle remarquable se rencontre dans certaines questions et tout au moins dans celle-ci :

On considère deux paraboles P, Q *ayant leurs axes rectangulaires et un sommet commun. Ces paraboles admettent, abstraction faite du sommet, un autre point commun réel* A ; *les tangentes en* A *coupent les courbes considérées en des points* B, C. *Le triangle* ABC *est caractérisé, aux indices* 5, — 1, — 1

On peut démontrer que BC est la tangente commune réelle aux paraboles P, Q. Par suite, P, Q sont les paraboles de M. Artzt, correspondant aux côtés AC, AB. D'après cela, on peut énoncer la proposition suivante :

Dans un triangle ABC *caractérisé, aux indices* 5, — 1, — 1, *les paraboles de M. Artzt, correspondant aux côtés* AC, AB, *se coupent orthogonalement en un point qui est le sommet commun de ces deux courbes.*

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(Paris, 30 juillet 1890) (*).

I. — On donne un cercle O, de rayon R; un point A de sa circonférence et la tangente, en A, à ce cercle. Déterminer la longueur AP $= x$, prise sur cette tangente indéfinie à partir du point A, de manière qu'en joignant PO et prolongeant cette droite jusqu'au deuxième point D où elle rencontre la circonférence; puis, menant, en D, la tangente DE qui rencontre, en E, la tangente PA prolongée, on forme un quadrilatère ODEA équivalent au triangle POA.

En désignant par α l'angle APD, on trouve facilement

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}.$$

De cette formule, on déduit la construction suivante : De O, comme centre, avec 3R pour rayon, on décrit une circonférence; elle coupe la tangente en A au point cherché.

II. — Mesure du volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

QUESTION 341

Solution par M. B. Sollertinsky, a Gatschina.

Construire un quadrilatère ABCD, *connaissant les longueurs* a, b, c, d *des côtés* AB, BC, CD, DA *et la longueur* f *de la droite qui divise les diagonales* AC, BD *dans un rapport donné* m : n.

(J. Neuberg.)

Soit
$$\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n} = \frac{BF}{FD}.$$

Dans le triangle ABD, menons FG parallèle à BA; alors EG est parallèle à CD.

(*) Énoncé emprunté à la publication de M. Croville-Morant, 20, rue de la Sorbonne. On trouvera, dans cette publication, le texte de toutes les questions posées, dans la session de juillet, au Baccalauréat de l'enseignement spécial, avec leurs solutions.

Le triangle FGE est déterminé par ses trois côtés :

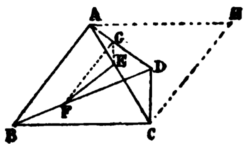
$$EF = f, \qquad FG = \frac{n}{m+n}a, \qquad EG = \frac{m}{m+n}c.$$

Ainsi, l'angle FGE est connu.

Cela posé, construisons le parallélogramme ABCH. Nous avons

$$\widehat{DCH} = \widehat{EGF}.$$

Par suite, le triangle DCH est déterminé; on connaît, en effet, les deux côtés $CD = c$, $CH = a$ et l'angle compris.



Les triangles DAH, ABC sont aussi déterminés; car, dans chacun d'eux, on connaît les trois côtés.

QUESTION 342

Solution par M. Aug. Boutin.

Résoudre les équations :

(1) $$x + y + z = a,$$
(2) $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2,$$
(3) $$x^3 + y^3 + z^3 = a^3.$$

On observera que x, y, z sont les racines de l'équation

$$X^3 - aX^2 + X\Sigma xy - xyz = 0.$$

Si, du carré de (1) on retranche (2), il vient

$$\Sigma xy = -b^2.$$

Or, $$\Sigma x^3 = \Sigma x.\Sigma x^2 - \Sigma x.\Sigma xy + 3xyz.$$

On a donc $$xyz = -ab^2,$$

et, par suite, $$X^3 - aX^2 - b^2X + ab^2 = 0,$$

ou $$(X - a)(X^2 - b^2) = 0.$$

Les racines cherchées sont donc a, b et $-b$.

Nota. — Nous avons reçu de M. G. Russo une solution identique à la précédente et diverses solutions de MM. Baudran, lycée de Rouen; I. Beyens, à Cadix; Bohn, maître répétiteur au collège de Verdun.

QUESTIONS PROPOSÉES

373. — M étant un point quelconque pris dans le plan d'un triangle ABC, démontrer que les puissances de A, B, C relativement aux circonférences circonscrites à MBC, MCA, MAB et la puissance de M relativement à la circonférence circonscrite à ABC sont inversement proportionnelles aux aires des triangles MBC, MCA, MAB, ABC. Montrer (en tenant compte des signes) que la somme des inverses de ces quatre puissances est nulle.

(E. Bernès.)

374. — Sur les trois côtés d'un triangle ABC on prend trois segments quelconques DD', EE', FF'. Démontrer que les axes radicaux des circonférences circonscrites à AEF, AE'F'; BFD, BF'D'; CDE, CD'E' sont trois droites concourantes. Deux des segments étant donnés, déterminer le troisième par la condition que le point de concours soit commun aux six circonférences. *(E. Bernès.)*

375. — Trois points D, E, F se déplacent uniformément sur les trois côtés d'un triangle ABC; faire voir que le point M commun aux trois circonférences circonscrites à AEF, BFD, CDE décrit une circonférence. Dans quel cas particulier le point M est-il fixe? *(E. Bernès.)*

ERRATA (*)

1° P. 164, l. 7 (en remontant). Les mots : *et* BCB' *étant*.. *Ainsi* sont inutiles à la démonstration et doivent être supprimés.

2° P. 168, question 370, au lieu de

$$2bc = a(b + c)$$

il faut

$$bc = a(b + c - a).$$

(*) Signalés par M. Sollertinsky.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 20300-9-90.

ÉQUATION DE LA SPHÈRE
CIRCONSCRITE AU TÉTRAÈDRE DE RÉFÉRENCE
(COORDONNÉES BARYCENTRIQUES)

Par M. **L. Bénézech.**

Soient V le volume du tétraèdre considéré, $A_1A_2A_3A_4$; d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34} les *carrés* des longueurs des arêtes; R le rayon de la sphère circonscrite; et α'_1, α_2, α'_3, α'_4 les coordonnées *barycentriques* du centre O de cette sphère, c'est-à-dire les volumes des tétraèdres $OA_2A_3A_4$, $OA_3A_4A_1$... affectés des signes ordinaires.

1. — Calculons α'_1, α'_2... en fonction des arêtes du tétraèdre. On a :

$$(1)\quad \overline{OA_1}^2 = R^2 = \frac{V(\alpha'_2 d_{12} + \alpha'_3 d_{13} + \alpha'_4 d_{14}) - \Sigma\alpha'_1\alpha'_2 d_{12}}{V^2}\ (*);$$

avec des formules analogues pour $\overline{OA_2}^2$, $\overline{OA_3}^2$, $\overline{OA_4}^2$.

On peut donc, en représentant par K la quantité $\dfrac{V^2R^2 + \Sigma\alpha'_1\alpha'_2 d_{12}}{V}$, écrire le système d'équations:

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha'_1 \,.\, o + \alpha'_2 \,.\, d_{12} + \alpha'_3 \,.\, d_{13} + \alpha'_4 \,.\, d_{14} = K, \\ \alpha'_1 \,.\, d_{21} + \alpha'_2 \,.\, o + \alpha'_3 \,.\, d_{23} + \alpha'_4 \,.\, d_{34} = K, \\ \alpha'_1 \,.\, d_{31} + \alpha'_2 \,.\, d_{32} + \alpha'_3 \,.\, o + \alpha'_4 \,.\, d_{24} = K, \\ \alpha'_1 \,.\, d_{41} + \alpha'_2 \,.\, d_{42} + \alpha'_3 \,.\, d_{43} + \alpha'_4 \,.\, o = K. \end{cases}$$

Désignons par D_1, D_2, D_3, D_4 les déterminants obtenus en remplaçant successivement, dans le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} o & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & o & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & o & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & o \end{vmatrix},$$

(*) Voyez notre *Note sur le centre des distances proportionnelles.*

les éléments de la première, de la deuxième, de la troisième, de la quatrième colonne par l'unité; et observons que ces déterminants sont liés par les conditions

$$(3)\quad D_2d_{12} + D_3d_{13} + D_4d_{14} = D_3d_{23} + D_4d_{24} + D_1d_{21}$$
$$= D_4d_{34} + D_1d_{31} + D_2d_{32} = D_1d_{41} + D_2d_{42} + D_3d_{43} = + D.$$

Rappelons enfin que le volume du tétraèdre est donné par la formule

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix},$$

La résolution du système d'équations (2) donne :

$$(4)\quad \frac{\alpha_1'}{D_1} = \frac{\alpha_2'}{D_2} = \frac{\alpha_3'}{D_3} = \frac{\alpha_4'}{D_4} = \frac{V}{-288V^2} = -\frac{1}{288V}.$$

2. — L'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre, en coordonnées barycentriques est, comme nous l'avons montré *(loc. cit.)*

$$V^2R^2 = -\Sigma d_{12}(\alpha_1 - \alpha_1')(\alpha_2 - \alpha_2'),$$

ou, en développant :

$$V^2R^2 = -\Sigma d_{12}\alpha_1\alpha_2 - \Sigma d_{12}\alpha_1'\alpha_2' + \Sigma d_{12}(\alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\alpha_1').$$

Or, à cause de la relation (1) le deuxième terme du second membre de cette équation peut être écrit ainsi :

$$V^2R^2 - V(\alpha_1'd_{12} + \alpha_3' d_{13} + \alpha_4'd_{14});$$

ou bien, en tenant compte de (4) :

$$V^2R^2 + \frac{1}{288}(D_2d_{12} + D_3d_{13} + D_4d_{14});$$

et enfin, en ayant égard à (3),

$$V^2R^2 + \frac{D}{288}.$$

De plus, d'après les relations (4), (3), le troisième terme peut être mis, successivement, sous les formes suivantes :

$$-\sum\frac{\alpha_1}{288V}(D_2d_{12} + D_3d_{13} + D_4d_{14})$$
$$-\frac{D}{288V}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \frac{-D}{288}.$$

L'équation de la sphère devient donc :

$$\text{(A)} \qquad V^2R^2 = -\Sigma d_{12}\alpha_1\alpha_2 + V^2R^2 + \frac{D}{288} - \frac{D}{288},$$

ou bien, $\Sigma d_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0.$

On obtient ainsi la formule connue (*).

ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Aug. Morel.**

(*Suite*, voir p. 223.)

104. Théorème. — *Le point de contact d'une tangente est le milieu de la partie de cette tangente comprise entre les asymptotes; de plus, cette partie de tangente est égale au diamètre qui lui est parallèle.*

En effet, nous venons de voir que si une corde d'une hyperbole rencontre l'asymptote en deux points, le milieu de la corde est aussi le milieu de la partie interceptée par les asymptotes. D'après cette propriété, si une droite se déplace parallèlement à elle-même, le diamètre correspondant est le lieu du milieu de la partie MN de cette droite comprise entre les asymptotes. Si la droite devient tangente à l'hyperbole, son point de contact L, qui se trouve sur le diamètre, est encore le milieu de MN.

(*) On trouvera dans *Salmon*, dans *Painvin* et dans une très intéressante Note de M. J. Neuberg : *Étude sur les coordonnées tétraédriques*, insérée au tome XXI des *Mémoires couronnés et autres mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique, § 17, d'autres démonstrations de cette formule. Nous en avons nous-même donné une démonstration à laquelle le lecteur pourra se reporter, dans notre *Note sur le tétraèdre orthocentrique* (*Mathesis*, 1890, p. 51). L'équation générale des sphères, en coordonnées barycentriques, est, comme nous l'avons montré *(loc. cit.)* :

$$(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 + D\alpha_4)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - \Sigma d_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

A, B, C, D représentant, respectivement, les puissances des sommets du tétraèdre de référence, par rapport à la sphère considérée. Si l'on suppose $A = B = C = D = 0$, on retombe sur la formule (A). G. L.

D'ailleurs, L étant sur la courbe, si l'on désigne par H l'extrémité du diamètre conjugué de OL, on a

$$LM . LN = \overline{OH}^2;$$

mais $\qquad LM = LN,$

donc $\qquad OH = LM = LN.$

105. Corollaire. — *Si l'on considère deux diamètres conjugués, et que par les extrémités de chacun d'eux on mène des parallèles à l'autre, les sommets du parallélogramme ainsi construit appartiennent aux asymptotes, qui sont par conséquent les diagonales de ce parallélogramme.*

106. Théorème. — *Si l'on considère un diamètre quelconque* II', *et que l'on mène une demi-corde* PN, *conjuguée à ce diamètre, le rapport de* $\overline{PN}^2$ *au rectangle des segments soustractifs* NI, NI' *est constant pour un même diamètre.*

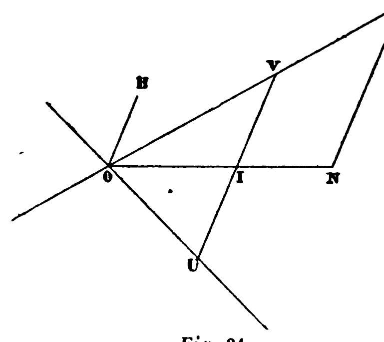


Fig. 31.

Soit OH le diamètre conjugué de OI; OH est parallèle à PN. Prolongeons la corde PN jusqu'au point Q où elle rencontre l'asymptote; enfin, traçons la tangente IV à l'extrémité du diamètre; on sait que IV = OH.

Cela posé, un théorème précédent donne

$$\overline{QN}^2 - \overline{PN}^2 = \overline{OH}^2,$$

ou

$$\frac{\overline{QN}^2}{\overline{OH}^2} - 1 = \frac{\overline{PN}^2}{\overline{OH}^2}.$$

Des triangles semblables QNO, VIO, on tire

$$\frac{\overline{QN}^2}{\overline{VI}^2} = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OI}^2};$$

ou, puisque VI = OH,

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{OH}^2} = \frac{\overline{ON}^2 - \overline{OI}^2}{\overline{OI}^2},$$

ou encore
$$\frac{\overline{PN}^2}{NI.NI'} = \frac{\overline{OH}^2}{\overline{OI}^2}.$$

Ainsi, le rapport $\frac{\overline{PN}^2}{NI.NI'}$ ne dépend que de la longueur des deux diamètres conjugués OH, OI.

107. Théorème. — *Deux cordes supplémentaires sont toujours parallèles à un système de diamètres conjugués.*

Nous rappelons que deux cordes supplémentaires sont celles qui joignent un point de la courbe aux extrémités d'un diamètre *réel.*

D'après cela, si par le centre qui est le milieu du diamètre, on mène une parallèle à l'une des cordes issues de l'une des extrémités du diamètre, elle passe par le milieu de la corde supplémentaire. Donc le diamètre correspondant à l'une des cordes est parallèle à l'autre corde.

108. Théorème. — *Si la tangente en un point* M *rencontre en* T *un diamètre réel et que, par le point* M, *on mène l'ordonnée* MP *correspondant à ce diamètre; en appelant* OI *le demi-diamètre réel; on a*

$$OT.OP = \overline{OI}^2.$$

Menons la tangente en I; elle est parallèle à MP. Soit U le point où elle rencontre la tangente MT. La droite OU passe par le milieu de la corde IM, et rencontre MP en un point V;

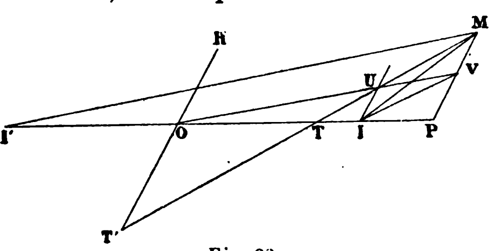


Fig. 22.

IV est parallèle à MT. Enfin, la corde I'M est parallèle à OU. On a donc

$$\frac{OP}{OI} = \frac{OV}{OU} = \frac{OI}{OT},$$

$$OP.OT = \overline{OI}^2.$$

109. Théorème. — *Si la tangente en* M *rencontre en* T′ *le diamètre imaginaire* OH, *et si l'on mène, par le point* M, *l'ordonnée* MP *parallèle à* OH, *jusqu'à sa rencontre avec le diamètre réel* OI, *conjugué de* OH, *on a*

$$OT'.MP = \overline{OH}^2.$$

En effet, les triangles semblables OTT′, PMT donnent

$$\frac{OT'}{MP} = \frac{OT}{TP}.$$

D'autre part $$\frac{\overline{MP}^2}{PI.PI'} = \frac{\overline{OH}^2}{\overline{OI}^2}.$$

En multipliant, on trouve

$$\frac{OT'.MP}{PI.PI'} = \frac{OT}{\overline{OI}^2} = \frac{\overline{OH}^2}{TP}.$$

Mais,

(1) $$\overline{OI}^2 = OT'.OP;$$

donc

(2) $$\frac{OT'.MP}{PI.PI'} = \frac{\overline{OH}^2}{OP.TP}.$$

D'ailleurs

(3) $$PI.PI' = \overline{OP}^2 - \overline{OI}^2.$$

Mais, l'égalité $$TP = OP - OT,$$

donne $$OP.TP = \overline{OP}^2 - OP.OT;$$

ou, en tenant compte de (1),

(4) $$OP.TP = \overline{OP}^2 - \overline{OI}^2.$$

Les égalités (3) et (4) prouvent que, dans (2), les dénominateurs sont égaux; par suite les numérateurs sont égaux, et l'on a, finalement,

$$OT'.MP = \overline{OH}^2.$$

110. Théorème. — *Si l'on considère deux demi-diamètres conjugués* OC, OD, *et qu'on les projette sur un des axes, la différence des carrés de ces projections est égale au carré du demi-axe sur lequel la projection est effectuée.*

Menons, par le point C, une parallèle CT au diamètre OD; elle est tangente en C, à la courbe; et l'on a

$$\mathrm{OT.OM} = \overline{\mathrm{OA}}^2.$$

De même, par le point D, menons une parallèle à OC; elle

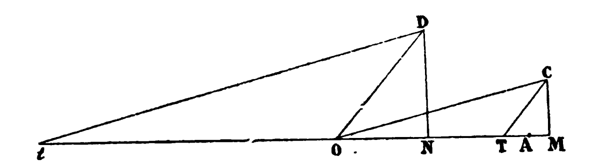


Fig. 33.

est tangente à l'hyperbole conjuguée; et si elle rencontre OA au point t, on a :

$$\mathrm{O}t.\mathrm{ON} = \overline{\mathrm{OA}}^2.$$

Par conséquent, $$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{O}t}{\mathrm{OT}}.$$

Mais les triangles tOD, OTC; ODN, TCM; tDN, OCN; deux-à-deux semblables, donnent :

$$\frac{\mathrm{O}t}{\mathrm{OT}} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{TC}} = \frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{N}t}{\mathrm{OM}}.$$

En définitive, on a donc :

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{N}t}{\mathrm{OM}},$$

ou $$\overline{\mathrm{OM}}^2 = \mathrm{ON.N}t = \overline{\mathrm{ON}}^2 + \mathrm{ON.O}t,$$

ou enfin

(1) $$\overline{\mathrm{OM}}^2 - \overline{\mathrm{ON}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2.$$

111. Théorème. — *La différence des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante, et égale à la différence des carrés des demi-axes.*

En effet, en projetant les demi-diamètres sur le second axe OB, considéré comme axe réel de l'hyperbole conjuguée, on a

(2) $$\overline{\mathrm{ON'}}^2 - \overline{\mathrm{OM'}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2.$$

Les égalités (1), (2) donnent

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 + \overline{\mathrm{OM'}}^2 - (\overline{\mathrm{ON}}^2 + \overline{\mathrm{ON'}}^2) = \overline{\mathrm{OA}}^2 - \overline{\mathrm{OB}}^2.$$

Or $$\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = \overline{OC}^2,$$
$$\overline{ON}^2 + \overline{ON'}^2 = \overline{OD}^2.$$

Donc $$\overline{OC}^2 - \overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2.$$

112. Théorème. — *Si, d'un point* M *de l'hyperbole, on mène à chacune des asymptotes une parallèle jusqu'à la rencontre avec l'autre asymptote, le rectangle des deux longueurs ainsi obtenues est constant.*

Pour le prouver, menons par le point M une perpendiculaire PMp à l'axe transverse, et, de même, par le point A, la droite RAS, perpendiculaire à l'axe. Les triangles semblables ZPM, zpM, ORS donnent

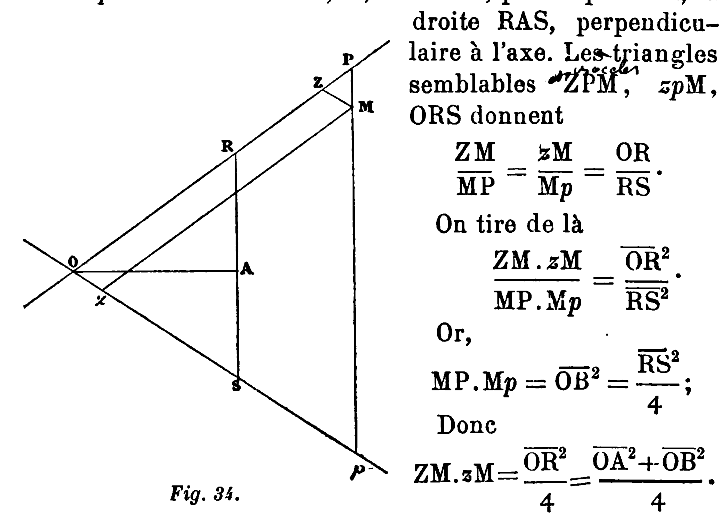


Fig. 34.

$$\frac{ZM}{MP} = \frac{zM}{Mp} = \frac{OR}{RS}.$$

On tire de là

$$\frac{ZM.zM}{MP.Mp} = \frac{\overline{OR}^2}{\overline{RS}^2}.$$

Or,

$$MP.Mp = \overline{OB}^2 = \frac{\overline{RS}^2}{4};$$

Donc

$$ZM.zM = \frac{\overline{OR}^2}{4} = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}{4}.$$

113. Théorème. — *L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante, et égale à l'aire du rectangle construit sur les axes.*

On sait que le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a pour diagonales les asymptotes. Il suffit donc de considérer le triangle formé par les asymptotes et l'un des côtés, triangle qui est le quart du parallélogramme considéré. Or, la base de ce triangle OIK est tangente à l'hyperbole en un point M, milieu de IK. Si l'on mène MZ et Mz respective-

ment parallèles aux asymptotes, l'aire du parallélogramme OZMz dépend du rectangle MZ.Mz, lequel est constant..

Donc, l'aire du triangle, double de la précédente, est aussi constante.

Il en est de même de l'aire du parallélogramme construit sur les deux diamètres conjugués.

Dans le cas particulier où ces diamètres deviennent les axes, l'aire considérée est précisément celle du rectangle construit sur les axes.

114. Définition. — Lorsque l'excentricité de l'hyperbole a pour valeur $\sqrt{2}$, les tangentes menées du foyer au cercle AA' sont à angle droit; il en est donc de même des droites OC, OC'. Donc les asymptotes sont rectangulaires; elles sont inclinées de 45° sur l'axe; et l'axe imaginaire est égal à l'axe transverse. L'hyperbole dans ce cas, porte le nom d'hyperbole *équilatère* ou *rectangulaire*.

115. Théorème. — *Dans toute hyperbole équilatère, les diamètres conjugués sont égaux, et également inclinés sur les asymptotes.*

En effet, le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a pour diagonales les asymptotes, et, dans l'hyperbole équilatère les asymptotes sont rectangulaires. De là résulte que ce parallélogramme est un losange; par conséquent ses côtés sont égaux, et de plus deux côtés consécutifs sont également inclinés sur la diagonale qui passe par leur point de rencontre. Les côtés de ce parallélogramme étant respectivement égaux et parallèles à un système de diamètres conjugués, il en résulte que deux diamètres conjugués sont égaux, et également inclinés sur une même asymptote.

116. Corollaire. — Considérons un système de diamètres conjugués OH et OI, et les symétriques OH' et OI' de ces diamètres, par rapport à l'un des axes. Puisque les angles COH, C'OH' sont égaux, et que, d'après le théorême précédent, il en est de même des angles COH et COI; par suite l'angle IOH'

est droit. De plus, on a OH = OH′, et enfin, OH = OI. Nous pouvons donc dire que

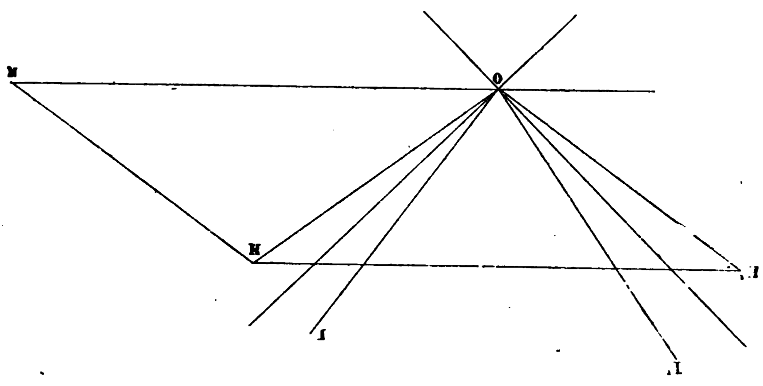


Fig. 35.

Dans toute hyperbole équilatère deux diamètres conjugués quelconques sont égaux.

117. Théorème. — *Si, dans une hyperbole équilatère, on mène l'ordonnée correspondant à un diamètre quelconque, le carré de cette ordonnée est égal au rectangle des segments soustractifs qu'elle détermine sur le diamètre.*

En effet, dans une hyperbole quelconque, le rapport du carré de l'ordonnée au rectangle des segments qu'elle détermine sur le diamètre, est égal au rapport du carré du diamètre parallèle à la corde, au carré du diamètre considéré. Si l'hyperbole est équilatère, deux diamètres conjugués quelconques sont égaux; le rapport de leurs carrés est donc égal à l'unité.

118. Théorème. — *La partie de normale comprise entre un point de la courbe et l'axe, est égale au demi-diamètre du point.*

Soit H un point de la courbe, HN la normale, OH le demi-diamètre. Je mène la tangente PH au point H; elle est parallèle au diamètre OI, conjugué de OH, et par suite, elle est

perpendiculaire au diamètre OH′ symétrique de OH par rapport à l'axe non transverse; donc HN est parallèle à OH′.

Cela posé, comme OH et OH′ sont égaux, HH′ est parallèle à l'axe OA. Par suite les longueurs OH′ et HN sont égales comme parallèles comprises entre parallèles.

On démontrerait, de même, que la partie HN′ de normale comprise entre le point H et l'axe imaginaire, est égale à OH.

119. Théorème. — *Si l'on considère une tangente et le diamètre correspondant* OP; *et si l'on mène* OY *perpendiculaire sur la tangente; l'angle* POY *a pour bissectrice l'axe* OA, *et l'on a*

$$OP.OY = \overline{OA}^2.$$

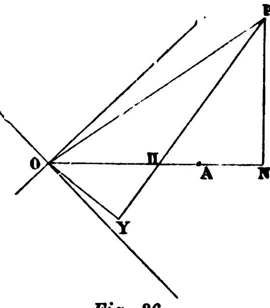


Fig. 36.

Le diamètre OY étant perpendiculaire sur la tangente, est perpendiculaire sur le diamètre OQ, conjugué de OP; il est donc symétrique de OP, par rapport à l'axe.

Cela posé, menons l'ordonnée PN du point de contact. La tangente rencontrant l'axe en H, les triangles HOY, OPN sont semblables, et donnent

$$\frac{OY}{ON} = \frac{OH}{OP};$$

d'où

$$OY.OP = ON.OH = \overline{OA}^2.$$

120. Théorème. — *L'hyperbole équilatère, circonscrite à un triangle passe par l'orthocentre de ce triangle.*

Soit le triangle ABC; je mène les hauteurs BH et AK, lesquelles se coupent au point O. Les triangles AOH, CHB, ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, sont semblables. Ainsi

$$\frac{AH}{HB} = \frac{HO}{HC},$$

ou

$$AH.HC = HB.HO.$$

Cela posé, les diamètres respectivement parallèles à AC et HB sont rectangulaires et par suite égaux; donc si O′ désigne

le second point de rencontre de BH avec l'hyperbole, on a

$$AH.HC = HB.HO'.$$

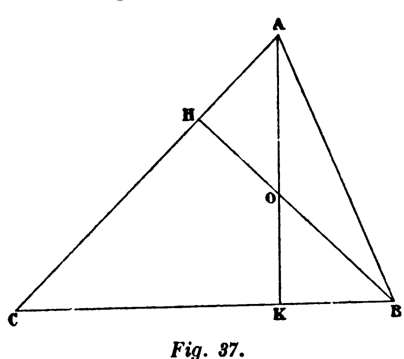


Fig. 37.

Cette égalité montre que O' est confondu avec le point O; par suite, la courbe passe par l'orthocentre de ABC.

121. Corollaire. — En supposant que le triangle soit rectangle en A, l'orthocentre coïncide avec A ; ainsi

Lorsqu'une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle rectangle, la hauteur menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est tangente à la courbe.

(A suivre.)

SUR LES TRIANGLES CARACTÉRISÉS

(*Suite et fin*, voir p. 203.)

En terminant cette petite Note, nous pouvons nous demander si, des caractéristiques étant données, à celles-ci correspond toujours un triangle; puis nous devons indiquer comment on construit celui-ci. Nous établirons à cet effet, le théorème suivant :

Théorème. VI. — *Pour qu'il existe un triangle caractérisé, aux indices* α, β, γ *il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < 0.$$

Posons, en effet, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = k.$

La relation donnée

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0,$$

devient $\quad (k - \beta\gamma)a^2 + (\beta + \gamma)(\beta b^2 + \gamma c^2) = 0,$

ou $\quad b^2\beta^2 + \beta\gamma(b^2 + c^2 - a^2) + c^2\gamma^2 + a^2k = 0.$

Le discriminant Δ du trinôme en β, écrit dans le premier membre, est égal à

$$\gamma^2(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2\gamma^2 - 4a^2b^2k,$$

et nous pouvons écrire

$$\Delta = \gamma^2(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) - 4a^2b^2k.$$

On voit que le coefficient de γ^2 représente seize fois l'aire, *changée de signe*, du triangle proposé ; c'est une quantité négative, si le triangle existe, comme nous le supposons. Par suite, on doit avoir $k < 0$; la condition énoncée est *nécessaire*.

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, il existe, en nombre infini, des triangles caractérisés, correspondant aux indices donnés.

Prenons en effet, arbitrairement, la base $BC = a$, du triangle que nous cherchons à construire. La relation

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0,$$

étant donnée, il existe une infinité de triangles dont les côtés vérifient cette égalité : le lieu du sommet mobile A est un cercle. En prenant pour axes de coordonnées la base BC et la médiatrice correspondante, l'équation de ce cercle est

$$\alpha a^2 + \beta\left\{y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right\} + \gamma\left\{y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right\} = 0,$$

ou

$$y^2(\beta + \gamma)^2 + \left\{x(\beta + \gamma) - \frac{a}{2}(\beta - \gamma)\right\}^2 + a^2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0.$$

On voit par ce résultat que le lieu de A est une circonférence réelle si l'on a

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < 0.$$

Le théorème se trouve ainsi complètement démontré.

Remarque I. — Lorsque la somme des indices est nulle, le triangle caractérisé, correspondant, existe toujours.

En effet, la relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

donne
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2},$$

et, par conséquent, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < 0.$

Remarque II. — Dans les triangles caractérisés aux indices α, β, γ il existe un point remarquable M, qu'on peut consi-

dérer comme lié au triangle considéré; c'est le point dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux quantités α, β, γ; l'*indice-point*, comme on pourrait l'appeler.

Il résulte, de la relation

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0,$$

que *dans un triangle caractérisé, la droite harmoniquement associée* à l'indice-point *passe par le point de Lemoine du triangle.* On peut dire aussi, en présentant autrement cette propriété, que *le réciproque de l'indice-point appartient à la circonférence circonscrite au triangle.*

La géométrie des triangles caractérisés s'enrichit ainsi d'un élément nouveau qui, selon toute vraisemblance, doit influer d'une façon remarquable sur l'étude particulière qu'ils comportent.

On peut aussi considérer un point M' dont les coordonnées normales soient proportionnelles aux quantités α, β, γ. On obtient ainsi un autre point remarquable, et la droite MM' se trouve être, par suite, une droite remarquable associée au triangle caractérisé, mais qui, il faut l'observer, n'existe pas dans un triangle non caractérisé.

Enfin, proposons-nous le problème suivant :

PROBLÈME : *Construire les triangles caractérisés, qui correspondent à des indices donnés* α_0, β_0, γ_0.

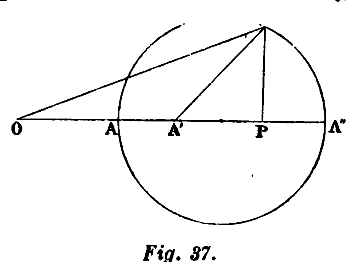


Fig. 37.

A cet effet, considérons quatre points en ligne droite : O, A, A', A" et posons

$$OA = \lambda, \qquad OA' = \lambda',$$
$$OA'' = \lambda''.$$

Sur AA", comme diamètre, décrivons une circonférence Δ, et, sur celle-ci, prenons un point M, arbitrairement. Ayant projeté M, en P, sur OA", nous avons

$$\overline{MP}^2 = AP.A''P,$$

ou

(1) $$\overline{MP}^2 = (OP - \lambda)(\lambda' - OP).$$

D'autre part

(2) $$\overline{MO}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{OP}^2,$$

(3) $$\overline{MA'}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{A'P}^2 = \overline{MP}^2 + (OP - \lambda')^2.$$

Entre (1), (2), (3) éliminons MP, OP. On trouve facilement

$$(\lambda + \lambda'')\overline{MA'}^2 + (2\lambda' - \lambda - \lambda'')\overline{MO}^2 + 2\lambda\lambda'\lambda'' - \lambda'^2(\lambda + \lambda'') = o,$$

ou

(A) $$\left(\frac{\lambda}{\lambda'}+\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)\overline{MA'}^2+\left(2-\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)\overline{MO}^2+\left(2\frac{\lambda\lambda''}{\lambda'^2}-\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)\overline{OA'}^2=o.$$

Cela posé, imaginons un triangle caractérisé, aux indices α_0, β_0, γ_0. Pour constrnire ce triangle, dont les côtés a, b, c vérifient la relation

(B) $$\alpha_0 a^2 + \beta_0 b^2 + \gamma_0 c^2 = o,$$

il suffit de déterminer λ, λ', λ'' de façon que les relations (A), (B) soient vérifiées, en supposant

$$MA' = a, \qquad MO = b, \qquad OA' = c.$$

Or ces égalités seront compatibles, si l'on a

(C) $$\frac{\dfrac{\lambda}{\lambda'}+\dfrac{\lambda''}{\lambda'}}{\alpha_0} = \frac{2-\dfrac{\lambda}{\lambda'}-\dfrac{\lambda''}{\lambda'}}{\beta_0} = \frac{\dfrac{2\lambda\lambda''}{\lambda'^2}-\dfrac{\lambda}{\lambda'}-\dfrac{\lambda''}{\lambda'}}{\gamma_0}.$$

Ces équations, dans lesquelles $\frac{\lambda}{\lambda'}$, $\frac{\lambda''}{\lambda'}$ sont les inconnues, donnent

$$\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda''}{\lambda'} = \frac{2\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0},$$

$$\frac{\lambda}{\lambda'}\cdot\frac{\lambda''}{\lambda'} = \frac{\alpha_0 + \gamma_0}{\alpha_0 + \beta_0}.$$

Par suite, $\frac{\lambda}{\lambda'}$, $\frac{\lambda''}{\lambda'}$ sont les racines de l'équation :

(D) $$(\alpha_0 + \beta_0)X^2 - 2\alpha_0 X + (\alpha_0 + \gamma_0) = o \text{ (*)}.$$

On aboutit, finalement, à la solution suivante :

Pour construire tous les triangles caractérisés, aux indices α_0, β_0, γ_0, *on calculera d'abord les racines* X', X'' *de l'équation* (D). *Ayant pris, arbitrairement, une longueur* OA' *qui représente l'un des côtés du triangle cherché, on construira, sur* OA, *les longueurs*

$$OA = X'.OA', \qquad OA'' = X''.OA'.$$

(*) En discutant la réalité des racines de cette équation, on trouve

$$\alpha_0^2 - (\alpha_0 + \beta_0)(\alpha_0 + \gamma_0) > o,$$

ou

$$\alpha_0\beta_0 + \beta_0\gamma_0 + \gamma_0\alpha_0 < o;$$

condition obtenue précédemment, par une autre voie.

Cela fait, sur AA', *comme diamètre, on décrit une circonférence* Δ.

Tout triangle ayant pour base OA', *et pour sommet un point* M *quelconque de* Δ (et tous les triangles semblables à celui-ci, bien entendu) *est caractérisé, aux indices* α_0, β_0, γ_0. G. L.

BIBLIOGRAPHIE

E. Pouthier. — **Leçons de Géométrie descriptive pour l'enseignement spécial** 4e, 5e et 6e années. — Un seul volume. Librairie Delagrave. — L'auteur s'est proposé, et il y a très heureusement réussi, de réunir dans un petit nombre de pages toutes les matières du programme officiel de ces trois classes, et de faire voir que la méthode d'enseignement de la Géométrie descriptive doit prendre pour base l'usage presque systématique d'un nombre très limité de règles simples, auxquelles viennent se rattacher toutes les constructions. Pour mettre cette idée plus en évidence, il a fait choix d'une notation invariable.

Au point de vue graphique, nous avons à louer l'emploi de planches hors texte *tirées en couleurs*, et si nous ajoutons que tous les soins ont été donnés à l'exécution typographique qui ne laisse rien à désirer, on ne sera pas surpris que nous recommandions cet ouvrage aux lecteurs pour lesquels il a été composé.

QUESTION 314.

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Trois points A, B, C *se meuvent uniformément sur trois droites données dans un même plan.*

Démontrer, géométriquement, que le sommet C *d'un triangle* abc, *semblable au triangle* ABC *et ayant une base fixe* ab, *décrit une circonférence* Δ.

Lorsque, sans changer les vitesses des mobiles, on déplace, parallèlement à elle-même, la droite parcourue par C, *la circonférence* Δ *décrite par* c *passe par un point fixe.* (J. Neuberg.)

A cause du mouvement uniforme, les divisions $A_1A_2 \ldots A_i$, $B_1B_2 \ldots B_i$ sont semblables : soit S leur centre de similitude.

1° Soient $A_iB_iJ_1$, $A_iB_iJ_2$ les triangles directement semblables

aux triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Le point S étant semblablement placé par rapport à tous les segments AB, les triangles SC_1A_1 et SJ_1A_i, SC_2A_2 et SJ_2A_i sont semblables; d'où l'on déduit aisément la similitude des triangles SC_1J_1 et SA_1A_i, SC_2J_2 et SA_2A_i. Donc, les segments C_1J_1, C_2J_2 sont dans un rapport constant avec A_1A_i, A_2A_i et par suite avec C_1C_i, C_2C_i. Les angles $C_iC_1J_1$, $C_iC_2J_2$ étant d'ailleurs constants, il s'ensuit que les droites S_1C_i, S_2C_i ont une direction fixe. Par suite, l'angle $J_1C_iJ_2$ est toujours égal à un angle fixe.

Donc, si l'on construit, sur une même base *ab*, des triangles directement semblables aux triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_iB_iC_i$, l'angle $c_1c_ic_2$ est constant, et le point c_i décrit une circonférence.

2° Soit Δ_1 la circonférence décrite par le sommet C, quand on prend le segment A_1B_1 comme base fixe *ab*.

Déplaçons la droite C_1C_i parallèlement à elle-même, *dans une direction fixe* $C_1C'_1$, et soit K_1 le second point d'intersection de $C_1C'_1$ avec Δ_1.

Le triangle $A_1B_1K_1$ étant semblable au triangle $A_kB_kC_k$, on en conclut la similitude des triangles SA_1A_k, SK_1C_k; d'où

$$(1) \qquad \frac{K_1C_k}{A_1A_k} = \frac{SK_1}{SA_1}.$$

Si K_1C_k coupe la droite $C'_1C'_2$ en C'_i, on a

$$\frac{K_1C'_i}{K_1C_k} = \frac{C'_1C'_i}{C_1C_k},$$

Mais
$$\frac{C'_1C'_i}{C_1C_k} = \frac{C_1C_i}{C_1C_k} = \frac{A_1A_i}{A_1A_k};$$

donc
$$\frac{K_1C'_i}{K_1C_k} = \frac{A_1A_i}{A_1A_k}, \quad \text{ou} \quad \frac{K_1C'_i}{A_1A_i} = \frac{K_1C_k}{A_1A_k};$$

et, à cause de (1),

$$\frac{K_1C'}{A_1A_i} = \frac{SK_1}{SA_1}.$$

On conclut de là que les triangles $SK_1C'_i$ et SA_1A_i, $A_1B_1K_1$ et $A_iB_iC'_i$, sont semblables.

Ainsi, le point K_1 appartient à chacune des circonférences Δ.

QUESTION 315

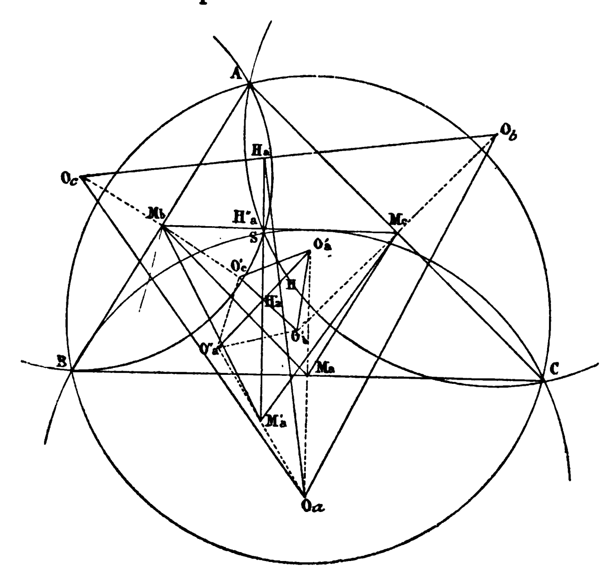
Solution par B. Sollertinsky, à Gatschina.

Soient : A'B'C' *un triangle quelconque, circonscrit au triangle* ABC; O_a, O_b, O_c *les centres des cercles* A'BC, B'CA, C'AB; O'_a, O'_b, O'_c *les symétriques des points* O_a, O_b, O_c, *par rapport à* BC, CA, AB. *Démontrer :*

1° Que les triangles $O_aO_bO_c$, $O'_aO'_bO'_c$ *sont symétriquement semblables ;*

2° Qu'ils ont même orthocentre. (J. Neuberg.)

1° Soit S le second point commun des circonférences A'BC,



B'CA. Ce point doit se trouver à l'intérieur du triangle ABC ou dans l'un des angles opposés par le sommet,

En effet, si l'on suppose que S est dans l'angle BAC, par exemple, et extérieur au triangle ABC, on a évidemment

$$\widehat{BSC} > \widehat{ASC}.$$

Mais $\widehat{BSC} = A'$, $\widehat{ASC} = \pi - B' = A' + C'$.

Si S est à l'intérieur de ABC, on a

$\widehat{ASB} = 2\pi - \widehat{BSC} - \widehat{ASC} = 2\pi - (\pi - A') - (\pi - B') = \pi - C'$;
et, par suite, S appartient à la circonférence C'AB.

Si enfin S est dans l'un des angles opposés par le sommet, dans l'angle opposé à A par exemple, on a

$$\widehat{BSA} = \widehat{BSC} - \widehat{ASC} = \pi - A' - B' = C'.$$

Donc, dans tous les cas, les circonférences O_a, O_b, O_c se coupent en un même point S.

Puisque les côtés du triangle $O_aO_bO_c$ sont perpendiculaires aux milieux des droites SA, SB, SC, les angles de ce triangle et ceux du triangle A'B'C', étant égaux ou supplémentaires aux angles BSC, CSA, ASB, sont égaux ou supplémentaires entre eux. Donc, les triangles $O_aO_bO_c$ et A'B'C' sont semblables.

Les points O'_a, O'_b, O'_c sont les centres des cercles symétriques aux cercles O_a, O_b, O_c. On verrait, de la même manière, que le second point commun S' des circonférences O'_a, O'_b se trouve en dehors du triangle ABC, dans l'un de ses angles, qu'il appartient, par suite, à la troisième circonférence O'_c. Les triangles $O'_aO'_bO'_c$, A'B'C' sont aussi semblables.

Les triangles $O_aO_bO_c$, $O'_aO'_bO'_c$, étant semblables au même triangle A'B'C', sont semblables. De plus, ils sont symétriquement semblables; car, s'ils étaient directement semblables, le triangle $M_aM_bM_c$ (complémentaire de ABC), serait semblable à ces triangles (*), et il en serait de même des triangles ABC, A'B'C'. Cela ne peut avoir lieu; car, dans ce cas particulier, le triangle $O'_aO'_bO'_c$ se réduit à un point, le centre du cercle ABC.

2° Soient H_a, H'_a les pieds des hauteurs O_aH_a, $O_aH'_a$; O''_a le symétrique de O'_a par rapport à $O'_bO'_c$, M_a le milieu de $O_aO''_a$. Le triangle $O''_aO'_bO'_c$, étant symétrique de $O'_aO'_bO'_c$, les trois triangles $O_aO_bO_c$, $O''_aO'_bO'_c$, $M'_aM_bM_c$ sont directement semblables; et le milieu H''_a du segment $H_aH'_a$ est le pied de la hauteur $M'H''_a$ du triangle $M'_aM_bM_c$. Mais $M'_aH'_a$, étant parallèle à $O_aO'_a$,

(*) Théor. de M. *H. Van Aubel.* Voir la lettre de M. Neuberg. J. E. 1888, p. 113.

est perpendiculaire à M_bM_c et par suite, se confond avec $M'_aM''_a$. Donc H'_aH_a est parallèle à $O_aO'_a$; et, si l'on désigne par H l'intersection des droites O_aH_a, $O'_aH'_a$, on a

$$\frac{O_aH}{HH_a} = \frac{O'_aH}{HH'_a}.$$

Ainsi le point H, et en général l'intersection de deux hauteurs correspondantes, est le point double des figures semblables $O_aO_bO_c$, $O'_aO'_bO'_c$. Mais, puisque ces figures ne se confondent pas, elles ne peuvent avoir trois points doubles distincts : donc deux de ces points, et alors tous les trois, se confondent en un seul point, l'orthocentre commun.

Remarque. — Si H′ est l'orthocentre du triangle $O''_aO'_bO'_c$, le point H'_a, milieu de HH′, est l'orthocentre du triangle $M'_aM'_bM'_c$. Donc

Si, sur les côtés du triangle $M_aM_bM_c$, *on construit des triangles directement semblables au triangle* $O_aO_bO_c$; *leurs orthocentres sont les pieds des hauteurs du triangle* $O'_aO'_bO'_c$.

QUESTION 323

Solution par M. B. Sollertinsky à Gatschina.

On projette un triangle ABC *sur tous les plans qui ont même trace sur le plan* ABC. *Si, sur une base fixe* A′B′ *on construit un triangle* A′B′C′ *semblable à l'une quelconque des projections de* ABC, *le sommet* C′ *décrit une circonférence.* (J. Neuberg.)

Si l'on rabat tous les plans, en les faisant tourner autour de leur trace commune, sur le plan ABC, les projections du même sommet se trouvent sur la perpendiculaire menée de ce sommet à la trace. L'aire du triangle, et celle de sa projection sont exprimées en fonction du cosinus des deux plans, ces aires varient donc proportionnellement au temps. On a alors trois mobiles A, B, C se mouvant uniformément sur trois droites d'un même plan. D'après une propriété connue (*Question* 314), le sommet C′ décrit une circonférence.

Le centre de cette circonférence est sur la base A'B'; car, à chaque triangle A'B'C', correspond le triangle A'B'C" symétriquement égal au premier.

Remarque. — *Si l'on déplace C parallèlement à la trace, la circonférence décrite par C' passe par un point fixe.* Car la vitesse de C ne change pas, et la droite parcourue par C se déplace parallèlement à elle-même. (Voir la *Question* 314, p. 256.)

QUESTION 342

Solution par M. B. Sollertinsky, à Gatschina.

Si l'on a

(1) $$f + g + h = 1,$$

on a

(2)
$$abc\left\{\frac{f}{a^2}+\frac{g}{b^2}+\frac{h}{c^2}-\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}\right)^2\right\}\sum\frac{a(b-c)^2}{f}$$
$$=\left\{(af+bg+ch)\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}\right)-1\right\}\sum\frac{a^2(b-c)^2}{f}.$$

(Catalan.)

D'après (1), le premier membre de (2) peut être écrit:

$$abc\left\{\left(\frac{f}{a^2}+\frac{g}{b^2}+\frac{h}{c^2}\right)(f+g+h)-\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}\right)^2\right\}\sum\frac{a(b-c)^2}{f}$$

ou $$abc\sum gh\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{bc}\right)\sum\frac{a(b-c)^2}{f}$$

ou, encore, $$\frac{fgh}{abc}\sum\frac{a^2(b-c)^2}{f}\sum\frac{a(b-c)^2}{f},$$

en observant que

$$gh\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{bc}\right)=\frac{gh(b-c)^2}{b^2c^2}=\frac{fgh}{a^2b^2c^2}.\frac{a^2(b-c)^2}{f}.$$

De même, le second membre de (2), peut se mettre sous la forme

$$\left\{ (af + bg + ch)\left(\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c}\right) - (f + g + h)^2 \right\} \sum \frac{a^2(b-c)^2}{f}$$

ou
$$\sum gh\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) \sum \frac{a^2(b-c)^2}{f}$$

ou, enfin,
$$\frac{fgh}{abc} \sum \frac{a(b-c)^2}{f} \sum \frac{a^2(b-c)^2}{f}.$$

L'identité proposée se trouve donc établie.

Généralisation. — Si

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_2 = 1,$$

on a

$$\left\{ \frac{x_1}{a_1^2} + \frac{x_2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n^2} - \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n}\right) \right\} \sum \frac{x_1 x_2 (a_1 - a_2)^2}{a_1 a_2}$$

$$= \left\{ (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a} + \ldots + \frac{x_n}{a_n}\right) - 1 \right\}$$

$$\sum x_1 x_2 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)^2.$$

QUESTION 344

Solution par M. Aug. Boutin,

Soit A *le sommet d'un tétraèdre,* BCD *sa base,* G *le point d'intersection des médianes du triangle* BCD. *Démontrer que*

(1) $3\overline{AB}^2 + 3\overline{AC}^2 + 3\overline{AD}^2 = BC^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + 9\overline{AG}^2.$

G étant le centre de gravité de BCD, un théorème connu (*) donne

(2) $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{DG}^2 + 3\overline{AG}^2.$

(*) *La somme des carrés des distances de* n *points* A, B, C, ... *à un point quelconque* S, *est égale à la somme des carrés des distances des mêmes points à leur centre* O, *augmentée de* n *fois le carré de* SO (Catalan, *Théorèmes et Problèmes*, livre III, théorème III).

D'ailleurs, on a

(3) $\overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + DG^2 = \frac{1}{3}(\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2).$

En combinant (2) et (3) on obtient l'égalité (1).

NOTA. — Solutions diverses par MM. I. Beyens, capitaine du génie à Cadix; Bohn, maître répétiteur au collège de Verdun; G. Russo, à Catanzaro.

QUESTION 347

Solution par M. Aug. Boutin.

Soient : A, B, C, *trois points en ligne droite. Par* A, *on fait passer une droite mobile* Δ, *et des points* B, C, *on abaisse, sur* Δ, *des perpendiculaires* BB′, CC′. *Trouver le lieu du point de concours des diagonales du trapèze ainsi formé.* (G. L.)

Soit M un point du lieu. Par M, menons une perpendiculaire PP′ à Δ : elle coupe ABC en un point fixe P. En effet, d'après un théorème connu, AP est la moyenne harmonique de AB, AC. Ainsi, P′ décrit le cercle dont AP est un diamètre. Le point M étant le milieu de PP′, M décrit un cercle homothétique au précédent, P étant le centre d'homothétie. D'après cette remarque, Q étant le milieu de AP, le lieu de M est la circonférence décrite sur PQ comme diamètre.

NOTA. — Solution trigonométrique par M. Bohn, maître répétiteur au collège de Verdun; solutions géométriques diverses, par MM. I. Beyens, capitaine du génie à Cadix; B. Sollertinsky, à Gatschina.

QUESTIONS PROPOSÉES

376. — Les bissectrices intérieures et extérieures des angles d'un parallélogramme comprennent entre elles 36 rectangles, dont 6 peuvent être groupés deux à deux, ainsi qu'il suit : 1° celui des bissectrices de deux angles opposés, et celui des bissectrices des deux autres angles; 2° le rectangle que forment

les bissectrices d'un angle avec celles de l'un des angles non opposés, et celui qu'elles forment avec les bissectrices de l'autre angle non opposé; 3° le rectangle des bissectrices intérieures, et celui des bissectrices extérieures.

On demande de démontrer, sans calcul, les propriétés suivantes :

Les deux rectangles du premier groupe sont équivalents.

La moyenne proportionnelle entre les aires des rectangles du deuxième groupe est moitié de l'aire du parallélogramme.

Les diagonales des rectangles du troisième groupe sont, respectivement, égales à la différence et à la somme de deux côtés adjacents du parallélogramme.

Les aires de ces mêmes rectangles ont : pour demi-différence, l'aire du parallélogramme; pour moyenne arithmétique, la somme des aires des rectangles du deuxième groupe; pour moyenne proportionnelle, l'aire d'un rectangle du premier groupe. *(A. Tissot.)*

377. — Dans tout triangle rectiligne :

1° $$\frac{b^2c^2 \sin^4 A - a^4(\cos^2 A + \cos A \cos B \cos C)^2}{c^2a^2 \sin^4 B - b^4(\cos^2 B + \cos A \cos B \cos C)^2} = \text{const},$$

2° $$b\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) + c\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = \frac{2a}{\sin A}.$$

(E. Catalan.)

378. — Dans tout triangle rectiligne, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{p-a} & \cos A & 1 \\ \frac{1}{p-b} & \cos B & 1 \\ \frac{1}{p-c} & \cos C & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

G. L.

Le Directeur-gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 22874-10-90.

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Lauvernay.**

Le problème que nous avons en vue dans cette Note est celui qui correspond à l'énoncé suivant:

Calculer les rayons des circonférences tangentes aux trois circonférences Δ_a, Δ_b, Δ_c, qui sont tangentes entre elles, et dont les centres sont les sommets d'un triangle donné ABC.

Soit O le centre de la circonférence tangente, extérieurement aux trois circonférences Δ dont les rayons sont, respectivement (*), $p-a$, $p-b$, $p-c$; appelons α, β, γ les angles respectifs BOC, COA, AOB. Dans le triangle COB, on a:

$$a^2 = (p-b+x)^2 + (p-c+x)^2 - 2(p-b+x)(p-c+x)\cos\alpha,$$

x étant le rayon de la circonférence O.

Or
$$a = p - b + p - c,$$

donc

$$(p-b)(p-c) = x^2 + ax - (p-b+x)(p-c+x)\cos\alpha,$$

d'où
$$\cos\alpha = \frac{x^2 + ax - (p-b)(p-c)}{(p-b+x)(p-c+x)}.$$

On trouve, de même,

$$\cos\beta = \frac{x^2 + bx - (p-a)(p-c)}{(p-c+x)(p-a+x)}$$

$$\cos\gamma = \frac{x^2 + cx - (p-a)(p-b)}{(p-a+x)(p-b+x)}$$

et, d'après la relation :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1,$$

l'équation du problème est

$$\begin{aligned}&[x^2 + ax - (p-b)(p-c)]^2(p-a+x)^2\\ &+ [x^2 + bx - (p-c)(p-a)]^2(p-b+x)^2\\ &+ [x^2 + cx - (p-a)(p-b)]^2(p-c+x)^2\\ &- 2[x^2 + ax - (p-b)(p-c)][x^2 + bx - (p-c)(p-a)]\\ &\quad[x^2 + cx - (p-a)(p-b)]\\ &= (p-a+x)^2(p-b+x)^2(p-c+x)^2,\end{aligned}$$

(*) Voyez: Catalan, *Théorèmes et Problèmes.*, etc., p. 71.

équation qui se réduit à la suivante :

$$(T^2 - 16S^2)p^2x^2 - 4pTS^2x + 4S^4 = 0.$$

Dans cette égalité, S désigne l'aire du triangle, et l'on suppose,

$$T \equiv a(p - a) + b(p - b) + c(p - c).$$

Nous allons maintenant discuter les résultats précédents.

1er Cas. $T < 4S$.—L'équation (1) a une seule racine positive,

$$r_1 = \frac{2S^2}{p(4S + T)},$$

qui, seule, convient à la question.

Si l'on suppose que le triangle soit tel que la seconde circonférence tangente aux trois premières enveloppe celle-ci, dans la mise en équation précédente pour trouver le rayon de cette seconde circonférence, il faut changer

$$p - a + x,$$

en
$$-(p - a) + x = -(p - a - x),$$

ce qui revient à changer les signes de x et des quantités

$$p - a - x, \quad p - b - x, \quad p - c - x.$$

Par conséquent, dans les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ il suffit de changer x en $-x$; la racine négative de l'équation (1), changée de signe, représente donc le rayon r_2 de cette seconde circonférence, et nous avons

$$r_2 = \frac{2S^2}{p(4S - T)}.$$

2e Cas. — Si l'on suppose au contraire $T > 4S$, l'équation (1) donne les deux rayons, car les circonférences cherchées sont toutes deux tangentes, extérieurement, aux trois circonférences données.

Remarquons d'abord que l'égalité

$$T^2 = 16S^2,$$

donne
$$\frac{1}{\sqrt{p - c}} = \frac{1}{\sqrt{p - a}} + \frac{1}{\sqrt{p - b}},$$

ou l'une des deux autres formes symétriques de celle-ci.

Or, cette dernière égalité exprime que les trois circonférences dont les rayons respectifs sont $p - a$, $p - b$, $p - c$ ont une tangente commune qui correspond à la solution infinie.

Si l'on désigne par x', x'' les racines de l'équation (1), on a

$$\frac{1}{2x'} = \frac{4S + T}{4(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$\frac{1}{2x''} = \frac{-4S + T}{4(p-a)(p-b)(p-c)};$$

d'où, par soustraction, $\frac{1}{2x'} - \frac{1}{2x''} = \frac{2}{r}$,

r étant le rayon du cercle inscrit au triangle.

Remarque I. — *Le carré de la différence des rayons des deux circonférences O et O′ est égal au carré de la distance de leurs centres, diminué de seize fois le produit de ces mêmes rayons* (*).

Soit S le centre radical des trois circonférences données, γ le centre de similitude externe des circonférences de rayons $p-b$, $p-c$; on sait que le lieu des points de contact des circonférences tangentes entre elles et tangentes aux deux circonférences BD, CD, est la circonférence dont le centre est γ et dont le rayon est γD. Or, si α, α' sont les points de rencontre de ce lieu avec la circonférence A de rayon $p-a$, les droites Aα, Aα' passent, respectivement, par les centres O, O′ des circonférences tangentes aux trois circonférences données; car α, α' sont les points de contact de celles-ci avec la circonférence A. D'ailleurs ces centres sont sur la droite menée par le centre radical S perpendiculairement à l'axe de similitude externe des trois circonférences données; et puisque la droite $\alpha\alpha'$ passe en S, on a

$$\overline{SD}^2 = r^2 = S\alpha . S\alpha'.$$

Soient (E, K) (E′, K′) les points de rencontre de OO′ avec les circonférences cherchées O, O′.

On a : $S\alpha . S\alpha' = SE.SE' = SK.SK'$

car S est centre de similitude des circonférences O et O′, d'où

$$S\alpha . S\alpha' = \sqrt{SE.SK.SE'.SK'} = \sqrt{-\left(r_1^2 - \overline{SO}^2\right)\left(r_2^2 - \overline{SO'}^2\right)} = r^2$$

(*) Dans cet énoncé, on suppose les deux racines positives; si les racines étaient de signes contraires, c'est-à-dire si l'une des circonférences était tangente extérieurement et l'autre tangente intérieurement, l'énoncé serait le suivant : *Le carré de la somme des rayons des deux circonférences O et O′ est égal au carré de la distance de leurs centres, augmenté de seize fois le produit de ces mêmes rayons,*

Mais $\frac{SO}{r_1} = \frac{SO'}{r_2} = \frac{d}{r_2 - r_1}$, d étant la distance OO′ des centres, ceux-ci étant situés du même côté de S, ou de part et d'autre, selon que les circonférences O, O′ ont leurs rayons de même signe ou de signes contraires. On aura donc, par substitution :

$$r^2 = \frac{-r_1r_2}{(r_2-r_1)^2}[(r_1 - r_2)^2 - d^2],$$
$$16r_1r_2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2.$$

Remarque II — 1°. L'analyse précédente conduit à une construction géométrique simple des deux centres O,O′.

2° Dans le cas où les deux circonférences O, O′ ont leurs rayons de même signe (*), on peut leur mener une tangente commune intérieure qui, jointe aux deux tangentes extérieures passant en S, déterminent un triangle auquel la circonférence O′ est ex-inscrite tandis que la circonférence O est inscrite au même triangle. Si l'on désigne par h la hauteur menée de S sur la tangente commune intérieure, on a

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2},$$

donc

$$\frac{2}{h} = \frac{4}{r},$$

ou

$$r = 2h = SD.$$

D'après la même analyse, l'équation donnant les rayons des circonférences tangentes aux cercles dont les rayons sont : p, $p - a$, $p - b$ est

$$(p - c)^2x^2[(p^2 - ab)^2 - 4S^2] - 2(p - c)S^2x(p^2 - ab) + S^4 = 0.$$

Si l'on désigne par $r_{1,c}$ $r_{2,c}$ les rayons, on a :

$$\frac{1}{r_{1,c}} = \frac{(p - c)(p^2 - ab + 2S)}{S^2},$$
$$\frac{1}{r_{2,c}} = \frac{(p - c)(p^2 - ab - 2S)}{S^2};$$

d'où les conséquences suivantes :

(*) Par abréviation, nous entendons que les rayons sont de signes contraires, lorsqu'ils sont représentés l'un par la racine positive de (1), l'autre par la seconde racine, *changée de signe;* ce qui arrive quand on suppose $T < 4S$.

1° $$\frac{1}{2r_{1,c}} - \frac{1}{2r_{2,c}} = \frac{2}{r_c}$$

2° Si d_c est la distance des centres de ces deux circonférences, on a

$$(r_{2,c} - r_{1,c})^2 = d^2 - 16r_{1,c}.r_{2,c}.$$

3° Le rayon r_c est double de la distance du centre γ du cercle (γ_c) ex-inscrit dans l'angle C à la tangente commune intérieure aux deux cercles cherchés.

Car si l'on considère le triangle ayant pour côtés cette tangente commune et les deux tangentes communes extérieures aux mêmes cercles, ces dernières concourant en γ, la distance γM à la tangente commune intérieure est la hauteur de ce triangle, issue de γ, et l'on sait que :

$$\frac{2}{\gamma M} = \frac{1}{r_{1,c}} - \frac{1}{r_{2,c}}, \quad \text{d'où} \quad 2.\gamma M = r_c.$$

Remarque III. — Les quatre droites des centres des quatre groupes de circonférences tangentes à trois des quatre cercles de rayons, p, $p - a$, $p - b$, $p - c$ sont concourantes au point symétrique de l'orthocentre par rapport au centre du cercle circonscrit au triangle.

ÉTUDE SUR LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

DES SECTIONS CONIQUES

Par M. **Auguste Morel.**

(Suite et fin, voir p. **243.**)

V. — Les sections planes du cône droit à base circulaire.

122. — Lorsqu'une droite Δ tourne autour d'un point fixe S, en rencontrant une ligne donnée Σ, le lieu décrit par Δ s'appelle une *surface conique;* elle est formée de deux parties opposées que l'on nomme les *nappes* de la surface conique; S est dit le *sommet* du cône.

Dans le cas où Σ est une circonférence, le point S appartenant à la perpendiculaire élevée au centre O de Σ, le lieu de Δ est

un cône de révolution; SO est l'axe de cette surface. Dans cette hypothèse, on peut toujours inscrire une infinité de sphères à cette surface qui est touchée par chacune d'elles le long d'un cercle perpendiculaire à l'axe. Le centre de ces sphères appartient à l'axe SO.

123. Théorème. — *Si l'on coupe une surface conique de révolution par un plan non perpendiculaire à l'axe, on peut toujours trouver, dans le plan de section, un point fixe et une droite fixe, tels que le rapport des distances d'un point quelconque de la section, au point fixe et à la droite fixe, conserve une valeur constante.*

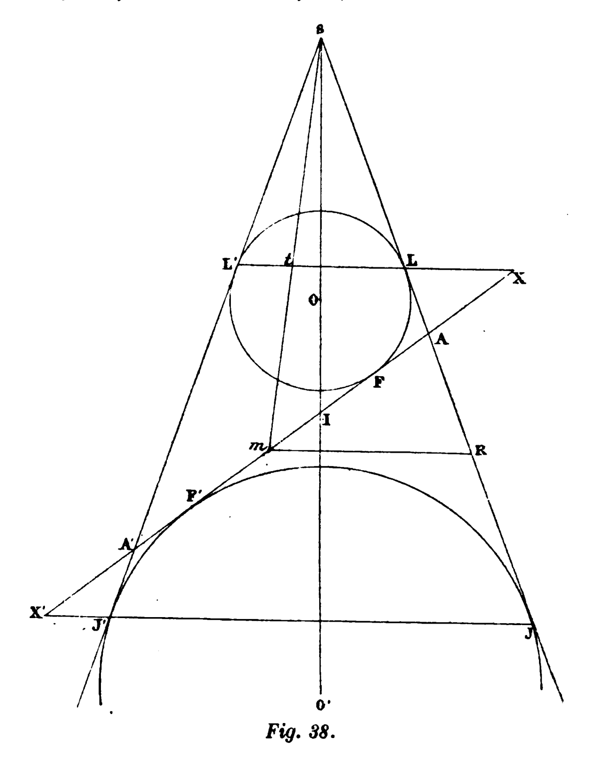


Fig. 38.

Considérons le cône JSJ′ coupé par un plan, et supposons que nous prenions pour plan de la figure celui qui est mené par l'axe SO, perpendiculairement au plan sécant; alors nous

obtenons, sur le plan de la figure, un triangle formé par deux génératrices opposées, et la droite AA′ d'intersection avec le plan sécant.

Dans le triangle SAA′ ainsi formé, inscrivons un cercle de centre O; il touche la droite AA′ en un point F. Considérons la sphère ayant ce centre pour centre. Elle est inscrite au cône qu'elle touche suivant un parallèle rencontrant le plan de la figure suivant LL′, et elle est, en outre, tangente au plan donné au point F.

Projetons le cône, le plan sécant et la sphère sur le plan de la figure; tous les points du parallèle de contact de la sphère et du cône se projettent sur la droite LL′; tous les points du plan sécant se projettent sur la droite AA′, et les deux plans LL′ et AA′ se coupent suivant une droite, perpendiculaire au plan de la figure, et projetée, par suite, en un point X. Si nous prenons, dans le plan AA′, un point quelconque M, projeté en m sur AA′, la distance du point M à la droite précédente est égale à mX.

Cela posé, considérons, dans le plan sécant, un point de la ligne d'intersection avec le cône; soit M ce point, projeté en m; joignons le point M au point F, et menons la génératrice passant par le point M. Elle rencontre le cercle de contact en un point T, projeté en t; les droites MT et MF étant des tangentes à une même sphère, menées par le même point M, sont égales. Du reste, si l'on mène par le point M un plan parallèle au plan LL′ et rencontrant SJ en R, les portions de génératrices comprises entre ces deux plans sont égales entre elles; en particulier, MT = LR.

Les triangles semblables, LAX, mAR donnent alors :

$$\frac{LA}{AX} = \frac{AR}{mA} = \frac{LA + AR}{mA + AX}.$$

Donc le rapport de LR à mX, ou, ce qui est la même chose, le rapport de MF à mX, est égal au rapport constant de LA à AX.

Le lieu du point M *est donc une conique, ayant le point* F *pour foyer et, pour directrice correspondante la perpendiculaire à* FX *menée, par* X, *dans le plan sécant.*

124. — Cherchons maintenant quelle est la nature de cette conique suivant la position du plan sécant.

Observons d'abord que, si le plan se déplace parallèlement à lui-même, le rapport de LA à AX reste constant; par conséquent les sections du cône par des plans parallèles sont des courbes ayant la même excentricité. Il suffit donc de considérer des plans faisant des angles différents avec le plan du parallèle LL', c'est-à-dire avec l'axe du cône.

Dans le triangle LAX, l'angle en L est le complément des demi-angles au sommet du cône; l'angle en X mesure l'angle du plan sécant avec le parallèle LL'; il est le complément de l'angle du plan sécant avec l'axe.

Soient 2α l'angle au sommet du cône, β l'angle de l'axe avec le plan sécant, α' l'angle ALX, lequel est égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$, et β' l'angle AXL, ou $\frac{\pi}{2} - \beta$. On observera que l'angle LAX est égal à $\alpha + \beta$.

Nous considèrerons trois cas.

125. — Si α' est plus grand que β', AX est plus grand que AL; l'excentricité est donc inférieure à l'unité; la ligne est une ellipse. Il résulte, de cette hypothèse, que α est plus petit que β, et que, par suite, l'angle LAX est supérieur à 2α. D'après cela, si l'on mène, par le sommet S, une parallèle à AX, elle est extérieure à l'angle LSL', et par suite la ligne AX rencontre la génératrice SL' du cône en un point A'. De plus, toutes les autres génératrices, se projetant à l'intérieur de l'angle LSL', le plan sécant toutes les génératrices rencontrera d'un même côté du point S. Les deux points A et A' sont les sommets de la courbe; pour avoir le second foyer, nous prendrons A'F' = AF.

Mais on sait qu'on peut tracer une circonférence exinscrite au triangle A'SA touchant le côté AA' au point F. Si l'on prend la ligne de contact JJ', rencontrant AA' au point X', on vérifiera encore que le rapport de RJ à mX' est constant, et égal à celui de A'J' à A'X', ou à celui de A'F' à A'X'. Donc la droite menée par X', perpendiculairement au plan du tableau, est la seconde directrice.

126. — Lorsque α' est égal à β', le rapport des longueurs LA, AX est égal à l'unité. La courbe est une parabole.

Dans ce cas, la ligne AX est parallèle à SX'; car il résulte, de l'hypothèse, que l'angle α est égal à β. Il n'y a donc pas de second point de rencontre de la droite AX avec la génératrice du cône située dans le plan de la figure; et l'on obtient un seul sommet et un seul foyer; car il n'existe pas d'autre circonférence tangente, à la fois, aux droites AX, SL et SL'.

127. — Enfin, si α' est plus petit que β', LA est plus grand que AX; donc l'excentricité est plus grande que l'unité. La courbe est une hyperbole.

Dans ce cas, l'angle $\alpha + \beta$ est plus petit que 2α. Si donc, par le point S, on mène une parallèle à AX, elle est à l'intérieur de l'angle LSL'. Il en résulte que la droite AX rencontre la génératrice SL' au delà du point S. Il y a donc des points de la courbe situés sur une des nappes du cône, et des points situés sur l'autre nappe. La courbe est alors composée de deux branches distinctes. Si maintenant on prend les génératrices du cône projetées entre SL et la parallèle à AX, elles rencontrent le plan sur la première nappe du cône; au contraire, les génératrices projetées entre SL' et la parallèle à AX rencontrent le plan sur la seconde nappe du cône.

Enfin, il existe un second cercle tangent à la fois aux droites SL, SL', AX, ayant son centre sur l'axe du cône : il touchera AX en un point F'; la corde de contact rencontrera AX au point X'. Le point F' sera le second foyer, et la directrice correspondante sera la perpendiculaire au plan de la figure, menée par le point X'.

De tout ce qui précède on déduit qu'un cône peut être coupé par un plan suivant une quelconque des trois coniques. C'est cette propriété qui a fait donner à l'ellipse, à l'hyperbole et à la parabole, le nom de *sections coniques*. De plus, puisque l'on peut obtenir ces trois courbes par un même procédé géométrique, il était naturel d'adopter une définition convenant aux trois courbes; c'est à quoi l'on arrive immédiatement en introduisant, au début de leur étude, la notion de l'excentricité.

128. — Inversement, cherchons si, *une conique étant donnée, on peut la placer sur un cône de révolution donné.*

Nous supposerons d'abord que la courbe est une ellipse. Alors le rapport de LA à AX est inférieur à l'unité. Dans le triangle LAX on connaît le côté LA, égal à FA, et le côté AX, ainsi que l'angle ALX $= \alpha'$, opposé au côté AX. Comme l'angle α' est aigu, et que AX surpasse AL, on peut construire le triangle ALX, et le problème n'a qu'une solution.

Alors, si l'on mène la bissectrice de l'angle LAA', extérieur au triangle, et que l'on construise OL perpendiculaire à LA, et rencontrant la bissectrice en O, OL sera le rayon de la sphère inscrite au cône, et tangente au plan de la conique; il sera donc possible de placer l'ellipse sur le cône donné; et, quel que soit ce cône, le problème a toujours une solution et une seule.

Si la courbe est une parabole, le triangle ALX sera isoscèle, et par suite facile à construire. En outre, on obtiendra, comme dans le cas précédent, le rayon de la sphère inscrite au cône, et tangente au plan de la courbe. Ainsi il est toujours possible de placer, sur un cône de révolution donné, une parabole donnée.

Supposons maintenant que la courbe soit une hyperbole. Alors, dans le triangle ALX, le côté AX est plus petit que AL; comme l'angle α' est aigu, le problème peut ne pas avoir de solution; ou bien il en aura deux.

Pour que le problème soit possible, il faut que, si l'on abaisse, du point A, une perpendiculaire AD sur LX, la distance AX soit au moins égale à AD; donc l'excentricité, qui est le rapport de LA à AX, est au plus égale au rapport de AL à AD. Lorsque cette condition est remplie, le problème a deux solutions; il est donc possible de placer, de deux manières différentes, l'hyperbole sur le cône donné. D'ailleurs, on trouvera, dans le cas de l'hyperbole, le rayon de la sphère tangente au cône et au plan de la courbe, de la même manière que précédemment.

129. Théorème. — *Le plan mené par le sommet du cône, parallèlement au plan sécant, coupe le cône suivant des droites parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.*

Pour démontrer cette propriété, considérons d'abord un point M de l'hyperbole, et, par ce point, traçons une perpendiculaire à l'axe AA′. Cette perpendiculaire MP rencontre l'axe AA′ au point P. Enfin, par MP, menons un plan perpendicu-

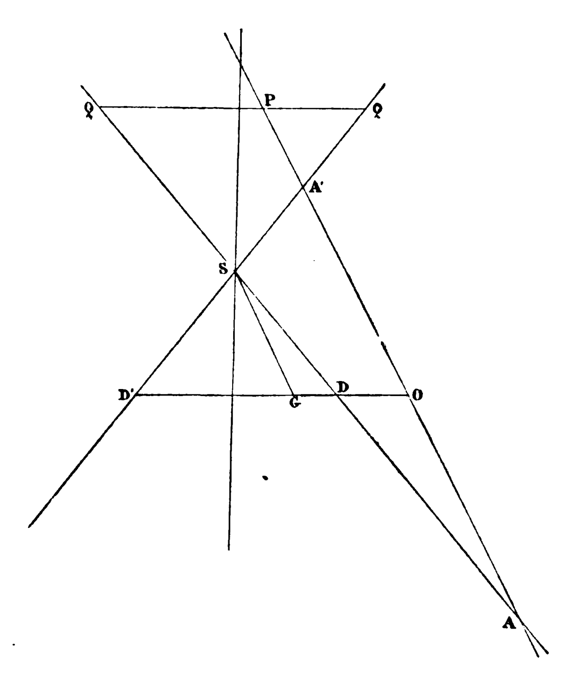


Fig. 39.

laire à l'axe du cône; il coupe le cône suivant un cercle dont QQ′ est le diamètre; et l'on a

$$\overline{MP}^2 = PQ.PQ'.$$

D'autre part, une propriété connue, relative à l'hyperbole, OB étant le demi-axe non transverse, donne

$$\frac{\overline{MP}^2}{PA.PA'} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OA}^2}.$$

Cela posé, menons, par le point O, un plan perpendiculaire à l'axe du cône; il coupe le cône suivant un cercle dont DD′ est le diamètre; et nous avons

$$\frac{OD}{A'O} = \frac{PQ}{A'P},$$

$$\frac{OD'}{AO} = \frac{PQ'}{AP}.$$

En multipliant membre à membre, il vient, d'après ce qui précède,

$$\frac{OD.OD'}{AO^2} = \frac{\overline{MP}^2}{A'P.AP} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OA}^2}.$$

Par conséquent, si, du point O, on mène une tangente au cercle DD', elle est égale au demi-axe transverse.

Cela posé, supposons que le plan parallèle au plan sécant ait pour trace la droite SH qui rencontre DD' au point H; soient SG la génératrice, et GH la perpendiculaire au plan de la figure, rencontrant cette génératrice, et par suite le cercle DD', en G. On a

$$\overline{GH}^2 = HD.HD\,.$$

D'autre part,

$$\frac{DH}{DO} = \frac{SH}{A'O},$$

$$\frac{D'H}{D'O} = \frac{SH}{AO}.$$

On conclut, de ces égalités,

$$\frac{\overline{GA}^2}{\overline{OB}} = \frac{\overline{SA}^2}{\overline{AO}^2},$$

ou

$$\frac{GH}{SH} = \frac{OB}{AO}.$$

Mais on sait que si, par le point A, on mène AI perpendiculaire à l'axe transverse jusqu'à la rencontre avec l'asymptote, AI est égal à OB; donc les deux triangles SGH, OIA sont semblables; par suite SG est parallèle à l'asymptote OI. On verrait, de même, que l'autre génératrice est parallèle à la seconde asymptote.

130. — D'après cette remarque, la condition de possibilité, trouvée précédemment, peut s'exprimer d'une façon très simple et que nous allons faire connaître.

A cet effet, observons que les deux triangles LAX, LSH

sont semblables, et donnent

$$\frac{LA}{AX} = \frac{LS}{SH} = \frac{SG}{SH}.$$

Or, la droite SH est d'autant plus grande, que SH est plus éloigné de l'axe du cône; donc, l'excentricité doit être, au plus, égale à $\frac{SG}{SR}$; mais alors le plan parallèle au plan sécant, mené par le sommet du cône, coupera le cône suivant deux génératrices faisant entre elles l'angle 2α et dans toute autre position, l'angle des deux génératrices sera inférieur à 2α. Ainsi :

On ne peut placer, sur un cône, que les hyperboles dont l'angle des asymptotes est, au plus, égal à l'angle au sommet du cône.

131. Théorème. — *Les plans qui passent par une tangente à la conique et les centres des deux sphères focales se coupent à angle droit.*

Nous nommerons ici *sphères focales* celles qui sont tangentes au cône et qui touchent, chacune, le plan de la conique en l'un des foyers de la courbe.

On sait que le plan tangent au cône est défini par la génératrice passant par le point considéré, et une tangente en ce point à une courbe quelconque passant par ce point, et située sur la surface. Ce plan est tangent tout le long de la génératrice, et il touche aussi la sphère focale. D'après cela, le centre de cette sphère focale est également distant du plan tangent et du plan de la conique.

Conséquemment, le plan qui passe par la tangente, intersection du plan tangent et du plan de la courbe, et par le centre de la sphère focale, est le plan bissecteur du dièdre formé par les deux premiers plans. L'autre plan bissecteur passe par le centre de la seconde sphère focale; et ces deux plans bissecteurs se coupent à angle droit.

132. Théorème. — *Le rectangle des perpendiculaires abaissées du foyer sur une tangente est équivalent au rectangle des rayons des sphères focales.*

Soient ω et ω' les centres des sphères focales; traçons PF

perpendiculaire à la tangente, et joignons le point P au point ω.

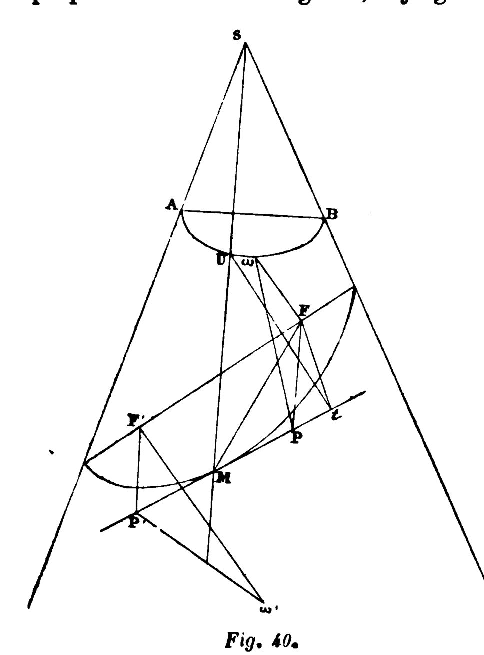


Fig. 40.

Dans le triangle rectangle ωFP, l'angle en P mesure l'angle du plan de la conique avec le plan MPω.

Considérons, de même, le triangle ω'F'P', construit d'une façon analogue; l'angle ω'P'F' est le complément de l'angle ωPF. Donc, les deux triangles rectangles sont semblables et donnent

$$\frac{\omega F}{F'P'} = \frac{FP}{\omega' F'},$$

ou

$$FP.FP' = \omega F.\omega' F'.$$

133. Théorème. — *La tangente en un point de la section fait des angles égaux avec le rayon vecteur et la génératrice passant par le point de contact.*

Soit la tangente Mt; menons le rayon vecteur FM, et la génératrice SM, qui rencontre en U le cercle de contact du cône avec la sphère focale. Le plan SMt est tangent au cône, et, par suite, tangent à la sphère, au point U.

On a donc $$FM = MU.$$

Prenons sur la tangente un point quelconque t, et joignons-le aux deux points F et U; nous avons

$$tF = tU.$$

Mais alors, les triangles UMt, FMt sont égaux, et les angles en M, opposés aux côtés égaux, sont égaux.

134. Remarque. — Les deux théorèmes précédents permettent d'établir, d'une façon différente, certaines propriétés

précédemment démontrées pour l'ellipse et l'hyperbole; par exemple, que *la tangente fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact*, et que *le rectangle des distances des foyers à une tangente est constant.*

135. Théorème. — *La section plane d'un cylindre droit, à base circulaire, est une ellipse, dont le demi petit axe est égal au rayon du cylindre.*

Considérons un cylindre, coupé par un plan. Prenons comme plan de la figure, le plan mené par l'axe du cylindre, perpendiculairement au plan sécant. Nous démontrerons, comme précédemment, qu'ayant construit une sphère tangente au cylindre le long d'un cercle LL', et touchant le plan sécant au point F, tandis que le plan du cercle LL' coupe le plan sécant suivant une droite projetée entièrement en X, le rapport des distances d'un point quelconque M de l'intersection, au point F et à la droite projetée en X, est constant, et égal au rapport de LA à AX. La section est donc une conique. De plus, puisque le cercle LL' est perpendiculaire aux génératrices du cylindre, le rapport de LA à AX est inférieur à l'unité. La courbe est donc une ellipse.

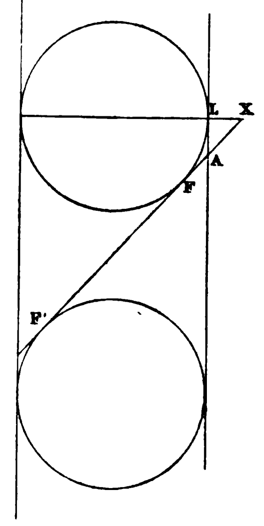


Fig. 41.

Dans le cylindre, toutes les sphères inscrites sont égales. Donc les deux sphères focales ayant même rayon, le rectangle des perpendiculaires abaissées des foyers, sur une tangente à la courbe, est équivalent au carré du rayon de la sphère focale, rayon égal à celui du cylindre. D'ailleurs, le produit des tangentes est aussi égal au carré du demi petit axe; donc le demi petit axe est égal au rayon du cylindre.

136. Théorème. — *Toute ellipse est équivalente à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre les demi-axes de l'ellipse.*

Considérons un cylindre de révolution, et inscrivons dans cette figure un prisme régulier, dont le nombre des faces latérales augmente indéfiniment. On admet (ou l'on peut démontrer) que le cylindre considéré est la limite du volume du prisme ainsi construit. On en conclut que, si l'on coupe le prisme et le cylindre par deux plans parallèles, obliques sur l'axe, on obtient un cylindre oblique, limite du prisme oblique correspondant. D'après cela, le cylindre oblique a pour mesure le produit de la surface de sa base par la hauteur. On peut aussi démontrer que le cylindre oblique est équivalent à un cylindre droit ayant pour base la section droite, et pour hauteur l'arête du cylindre oblique considéré.

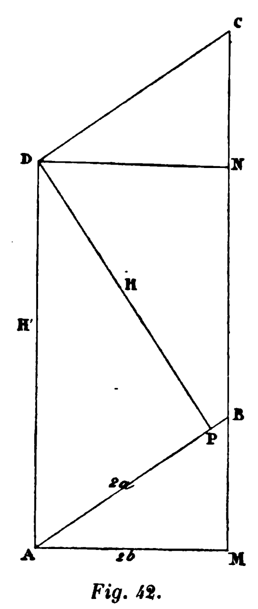


Fig. 42.

Cela posé, considérons un cylindre droit de rayon b et de hauteur h; et coupons-le par un plan passant par un point de la base inférieure; nous obtenons ainsi une ellipse dont le grand axe est représenté par $2a$, et dont le petit axe est égal à $2b$.

Soit E l'aire de cette ellipse; considérons le cylindre oblique ayant cette ellipse pour base, et pour arête l'arête du cylindre droit. Soit H la hauteur de ce cylindre oblique, équivalent au cylindre droit. Appelant H′ la hauteur de ce dernier, on a :

$$\mathrm{EH} = \pi b^2 \mathrm{H}'.$$

Mais le plan qui passe par le grand axe de l'ellipse et l'axe du cylindre est perpendiculaire au plan sécant. Il est facile d'en conclure que :

$$\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} = \frac{a}{b}.$$

Par suite $$\mathrm{E} = \pi b^2 \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} = \pi ab.$$

Telle est l'expression de l'aire de l'ellipse.

CORRESPONDANCE

Dans le tome VI, année 1882, du *Journal de Mathématiques élémentaires* (p. 96), se trouve énoncée la question suivante (n°32) :

Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb' = 0,$$

aient une racine commune est que l'une ou l'autre de ces équations ait ses racines égales. (Lauvernay.)

Une solution de M. Mosnat a été publiée t. VII, p. 41. Elle est très exacte, mais elle exige un calcul un peu laborieux. La méthode suivante, plus simple, sera peut-être de nature à intéresser vos lecteurs.

Soient r_1, r_2 les racines de la première équation; ρ_1, ρ_2 celles de la seconde. Appelons α, β, γ les coefficients de celle-ci; on a :

(1) $$2(c\alpha + a\gamma) = b\beta,$$

ou

$$2\left(\frac{c}{a} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) - \frac{b}{a}\,\frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

On a donc :

$$2(r_1r_2 + \rho_1\rho_2) - (r_1 + r_2)(\rho_1 + \rho_2) = 0,$$

ou

(2) $$(r_1 - \rho_1)(r_2 - \rho_2) + (r_1 - \rho_2)(r_2 - \rho_1) = 0.$$

1° Si les deux équations ont une racine commune $r_2 = \rho_2$, la relation (2) devient :

$$(r_1 - r_2)(r_2 - \rho_1) = 0.$$

Ainsi, la racine commune r_2 est égale soit à r_1, soit à ρ_1, c'est-à-dire que l'une des équations données a ses racines égales.

2° Si la première équation a ses racines égales, on a $r_1 = r_2$; la relation (2) devient :

$$(r_1 - \rho_1)(r_1 - \rho_2) = 0.$$

Donc r_1 est égale, soit à ρ_1, soit à ρ_2, c'est-à-dire que les deux équations ont une racine commune.

Il en serait de même, en raison de la symétrie de la relation (1) si nous suppposions $\rho_1 = \rho_2$, ce qui démontre complètement la proposition énoncée.

Un Abonné.

QUESTIONS D'EXAMEN (*)

1. Les relations :

(1) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

(2) $$a = b \cos C + c \cos B,$$

(3) $$b = c \cos A + a \cos C,$$

sont-elles distinctes?

En déduire l'égalité.

(4) $$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B.$$

(Saint-Cyr, 1890.)

1° Les relations indiquées (il est sous entendu que les lettres employées désignent les éléments d'un triangle) ne sont pas distinctes, puisqu'elles sont homogènes en a, b, c. Dans tous les cas, elles donnent une relation entre les éléments A, B, C. Celle-ci s'obtient en résolvant (2), (3) par rapport aux quantités $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, et en portant, dans (1), les valeurs trouvées. On aboutit ainsi, facilement, à l'égalité, bien connue,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1,$$

de laquelle on déduit, comme on sait, $A + B + C = \pi$; en supposant A, B, C compris entre O et π.

2° Pour déduire (4), des égalités proposées, il suffit d'éliminer, entre elles, cos A et cos C. A cet effet, on multiplie, par $1, -2a, +2b$; ajoutant les résultats obtenus, on trouve l'égalité (4).

Ces observations s'appliquent à tous les exercices du même genre. Ex. :

Les relations

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B,$$
$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c};$$

sont-elles distinctes ?

En déduire $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, etc.

2. — On considère une circonférence Δ, un diamètre fixe, BC et un rayon OA, incliné de 45° sur BC. Par un point M, pris sur OA, on mène MP perpendiculaire à BC, MQ parallèle à BC jusqu'à sa rencontre en Q avec Δ. Trouver la position du point M pour laquelle

(1) $$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 = a^2.$$

(École Navale, 1890.)

(*) Ces énoncés sont empruntés à la publication : *Examens d'admission à l'école spéciale de Saint-Cyr* (Concours de 1890) éditée par la librairie Croville-Morant, 20, rue de la Sorbonne ; et à celle des *Examens d'admission à l'École navale*, éditée par la même librairie.

Abaissons QH perpendiculaire sur BC et posons

$$OP = x, \qquad BH = y.$$

Nous avons

(2) $$\overline{QH}^2 = x^2 = y(2R - y).$$

D'ailleurs $$MQ = OH + OP = R - y + x.$$

D'après cela, (1) devient

$$x^2 + (R - y + x)^2 = a^2,$$

ou $$x^2 + y^2 - 2Ry - 2xy + (R + x)^2 = a^2,$$

ou encore, en tenant compte de (2),

(3) $$2xy = (R + x)^2 - a^2.$$

En éliminant y entre les égalités (2), (3), on trouve

$$x^2 = \frac{(R + x)^2 - a^2}{2x}\left[2R - \frac{(R + x)^2 - a^2}{2x}\right],$$

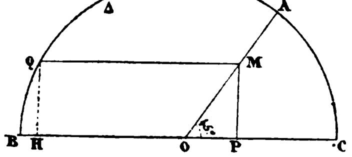
ou $$4x^4 + [(R + x)^2 - a^2][(R - x)^2 - a^2] = 0.$$

Développant et simplifiant, on a

$$5x^4 - 2x^2(R^2 + a^2) + (R^2 - a^2)^2 = 0.$$

On discute facilement cette équation bi-carrée. On voit, d'abord, par l'étude du discriminant, que le rapport $\frac{a^2}{R^2}$ doit être compris entre

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}.$$



Il faut ensuite que l'on ait

$$x^2 \leqslant R^2.$$

En subtituant, dans (A), 1° zéro, 2° R^2, on trouve des résultats positifs. Il est donc nécessaire que la demi-somme des racines soit comprise entre zéro et R^2 et l'on a

$$\frac{R^2 + a^2}{5} \leqslant R^2$$

ou $$a^2 \leqslant 4R^2; \text{ etc. } (^*).$$

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

Section des sciences mathématiques.

COMPOSITIONS ÉCRITES (1890) (*)

Algèbre et Trigonométrie. — Les arêtes latérales d'une pyramide triangulaire, de sommet S, sont représentées par α. β, γ, et les côtés de la base ABC, par a, b, c

(*) Nous insérerons très volontiers les questions analogues, choisies parmi les exercices les plus intéressants qui ont été posés aux derniers concours de Saint-Cyr, de l'École Navale ou du Baccalauréat ès sciences que nos correspondants voudront bien nous adresser. Un aperçu de la solution et de la discussion suffit pour la rédaction que nous voulons insérer. G. L.

(*) Énoncés empruntés à la publication faite par la librairie Croville-Morant. On trouvera, dans cette publication, les énoncés des leçons proposées pour le concours de 1891.

1° Exprimer, au moyen de ces quantités qu'il existe un cône droit tangent aux faces latérales et dont la base circulaire est tangente aux côtés de la base de la pyramide. Calculer le demi-angle au sommet du cône: on désignera par φ cet angle.

2° On done a, b, c, φ: calculer le rayon d'une sphère tangente au cône et aux faces de la pyramide qui passent par le sommet C.

Appliquer aux données suivantes:

$$a = 18,\ b = 50,\ c = 40,\ \varphi = 60^o.$$

Géométrie descriptive. — On a représenté un prisme vertical à base carrée par une succession de fils qui figurent les verticales des faces de ce prisme; ces fils sont respectivement attachés aux côtés des carrés qui constituent les bases du prisme.

On soumet ce prisme à une torsion, dans laquelle la base inférieure restant fixe, la base supérieure tourne dans son plan, autour de son centre, d'un angle de 45°, dans le sens de gauche à droite, pour un observateur debout sur le plan horizontal. Après cette déformation, les fils, supposés élastiques, restent rectilignes et dessinent une surface S, qui limite le volume occupé par le prisme déformé.

1° Quelle est la nature de la surface S et celle de sa section par un plan parallèle aux bases?

2° Ce plan sécant étant mené à la distance z de la base inférieure, montrer que l'aire de cette section s'exprime par un trinôme en z, du second degré. En conclure le volume du prisme déformé; dire si la torsion a eu pour effet de contracter ou de dilater le volume du prisme.

3° Mettre en projections la surface S, et prouver, notamment, que le contour apparent horizontal se compose de quatre paraboles qui ont le même foyer et dont les directrices forment un carré.

Données: La base inférieure est le carré ABCD dans le plan horizontal; le point A sur la ligne de terre; AB faisant, avec cette ligne, un angle de 22°30'. Côté du carré = AB = 8 centimètres; hauteur du prisme = h = 10 centimètres.

Une rédaction soignée doit accompagner le dessin.

Mécanique. — Dans un plan vertical, sur une droite horizontale ox, sont placées deux plaques rectangulaires A et B qui peuvent glisser sur ox. Ces plaques pèsent l'une et l'autre 8 kilogrammes, le coefficient, de frottement de B sur ox est égal à $\frac{1}{2}$, et le coefficient de frottement de A sur ox est égal à $\frac{1}{4}$.

Ces deux plaques sont reliées l'une à l'autre par un fil élastique qui est horizontal et dont l'allongement est proportionnel à la tension, de telle sorte que la tension de ce fil est égale à 10 kilogrammes, lorsque l'on double sa longueur.

A l'état naturel, ce fil a une longueur de 1 mètre; on écarte ensuite les plaques, de manière que le fil prenne une longueur de 1m50; puis on abandonne les plaques, sans vitesse initiale.

Les plaques se mettent alors toutes deux en mouvement et se rapprochent; puis la plaque B s'arrête et reste en repos; la plaque A continue à se mouvoir seule, puis s'arrête, et le système reste en repos.

On demande quelle est la distance des deux plaques lorsque la plaque B s'arrête, et quelle est cette distance lorsqu'enfin les deux plaques sont en repos.

On donnera ces distances avec deux décimales.

On négligera la masse du fil élastique.

QUESTION 318

Solution par M. B. SOLLERTINSKY à Gatschina.

Étant donnés un triangle et une droite Δ, *soient* P, Q, R, *les projections, d'un point quelconque* M, *de* Δ, *sur les côtés de* ABC. *Démontrer :*

1° Que les angles de PQR *vérifient constamment une relation de la forme*

$$p \cot g\, P + q \cot g\, Q + r \cot g\, R = 1;$$

2° Que, si l'on construit sur une base fixe P'Q' *un triangle* P'Q'R' *semblable à* PQR, *le point* R' *décrit une circonférence.*

(J. Neuberg.)

LEMME. — *Si, la base* BC *d'un triangle* ABC *restant fixe, le sommet opposé* A *décrit une circonférence* O, *il y a entre les angles de ce triangle la relation* (*) :

$$(a)\quad \overline{BC}^2 \cot g\, A + (\overline{OC}^2 - \overline{OA}^2) \cot g\, B + (\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2) \cot g\, C = \pm\, 2OO'.BC,$$

dans laquelle OO' *est la distance du centre* O *à la base* BC *et dans laquelle on doit prendre le signe* + *ou* —, *suivant que les points* A, O *sont du même côté de* BC *ou de côtés différents.*

Soit A' la projection de A sur BC. Dans le triangle AOO', on a

$$(1)\qquad \overline{OA}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{AO'}^2 \mp 2OO'.AA',$$

égalité dans laquelle on prend le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que l'angle AO'O est aigu ou obtus; c'est-à-dire suivant que les points O, A sont du même côté ou de côtés différents de BC. Les triangles ABO', OBO' donnent:

$$\overline{AO'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO'}^2 - 2AB.BO' \cos ABO',$$

$$BO' = BO \cos OBO';$$

d'où, puisque les angles ABO' et ABC, OBO' et OBC sont en même temps égaux ou supplémentaires,

$$\overline{AO'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO'}^2 - 2AB.BO \cos OBC \cos B.$$

(*) Comparer :

« Le lieu du sommet C d'un triangle dont la base est fixe et dont les angles vérifient l'égalité :

$$m \cot g\, A + n \cot g\, B + p \cot g\, C = \cot g\, \varphi,$$

est la circonférence représentée par l'équation :

$$p(x^2 + y^2) + 2ax(m - n) - 2ay \cot g\, \varphi = a^2(p - 2m - 2n). »$$

(*J. Gillet*, Mathesis, t. II. p. 242).

En remplaçant, dans (1), $\overline{AO'}^2$ par cette valeur, après avoir observé que :

$$\overline{OO'}^2 + \overline{BO'}^2 = \overline{BO}^2,$$

$$AB \cos B = AB \sin B \operatorname{cotg} B = AA' \operatorname{cotg} B,$$

on trouve :

$$\overline{OA}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 - 2BO.AA'\cos OBC \operatorname{cotg} B \mp 2OO'.AA'.$$

Mais, si CH est la hauteur de ABC, on a

$$AB = CH(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B),$$

puis

$$\overline{AB}^2 = AB.CH(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B) = BC.AA'(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B);$$

et, par suite,

$$\overline{OA}^2 - \overline{BO}^2 = AA'[BC(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B) - 2BO\cos OBC \operatorname{cotg} B \mp 2OO'].$$

De cette égalité, on déduit la relation cherchée, en observant que

$$AA' = \frac{BC}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C},$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{BO}^2 - 2BC.BO \cos OBC = \overline{CO}^2.$$

Revenons maintenant à la question proposée. Si le point M se meut uniformément sur la droite Δ, ses projections P, Q, R se meuvent uniformément sur les côtés de ABC. Donc, la seconde partie du théorème est démontrée (*Question* 314). Par suite, d'après le lemme précédent, les angles de PQR vérifient la relation (A).

Si la droite Δ esl extérieure ou tangente à la circonférence ABC, et si, par suite, le triangle PQR ne se réduit jamais à une droite (de Simson) ou ne se réduit à une droite qu'une seule fois, la droite P'Q' est extérieure à la circonférence, lieu de K', ou lui est tangente. Donc, on doit, en ce cas, supprimer dans l'expression (A) le signe —; et OO' n'étant pas nul, on en tire une relation de la forme :

$$p \operatorname{cotg} P + q \operatorname{cotg} Q + r \operatorname{cotg} R = 1.$$

Pour examiner les autres cas, nous avons à faire une digression.

On sait (*) que les perpendiculaires, abaissées des sommets de ABC, sur les côtés correspondants de PQR, concourent en un point N, inverse de M. Les faisceaux (A.NN'...), (B.NN'...)

(*) Catalan. *Théor. et probl.* 6e éd. p. 52-53.

étant symétriquement égaux aux faisceaux (A.MM'...), (B.MM'...), qui s'appuient sur la même division (MM'...), sont homographiques. Donc, le lieu de N est une section conique (**). Cette section est circonscrite au triangle ABC; car, à tout point M situé sur l'un des côtés de ABC, correspond le sommet opposé de ce triangle.

Pour que le point N s'éloigne à l'infini, il faut et il suffit que le triangle PQR se réduise à une droite; et, par suite, que le point M soit sur la circonférence ABC. Donc :

Le lieu de N est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que la droite Δ est extérieure, sécante ou tangente au cercle ABC (***).

Si la droite Δ rencontre la circonférence ABC aux points M', M'', les points à l'infini N', N'' sont dans les directions perpendiculaires sur les droites de Simson, relatives à ces points (M', M''). L'angle de ces droites, et par suite l'angle des asymptotes, étant égal à l'angle M'AM'', la condition nécessaire et suffisante, pour que le lieu de N soit une hyperbole équilatère, se réduit à ce que les points M' M'' soient diamétralement opposés.

Cela posé, poursuivons notre discussion.

Pour que le centre O de la circonférence, lieu de R', soit sur la droite P'Q', il faut et il suffit qu'à tout triangle P'Q'R' corresponde un triangle symétrique $P'Q'R'_1$; et, par suite, qu'à tout triangle PQR en corresponde un autre $P_1Q_1R_1$, symétriquement semblable. Si les sommets des triangles PQR, $P_1Q_1R_1$ sont les projections des points M, M_1, et si N, N_1 sont les inverses de ces points, il faut et il suffit que les rayons correspondants des faisceaux (N.ABC) et (N_1.ABC) soient symétriques relativement à une même direction; et, par suite, que la conique NN_1ABC soit une hyperbole équilatère (*). Mais

(**) Rouché et Comberousse. *Traité de Géom.* 4e éd. § 1126.

(***) Compar. L'article de M. Brocard. J. S. 1884, p. 199.

(*) Deux faisceaux homographiques (N.ABC...), (N_1,ABC...), déterminés par trois couples de rayons homologues, étant symétriquement égaux, les parallèles aux bissectrices de l'angle $\widehat{NAN_1}$, menées par N, N_1, sont aussi leurs rayons homologues. La conique NN_1ABC, lieu des intersections des rayons homologues, a donc deux asymptotes rectangulaires. D'ailleurs, cette conique, et l'inverse de la droite MM_1 coïncident; car les deux courbes ont cinq points communs.

pour que cela soit ainsi, il faut et il suffit que la droite MM_1 passe par le centre du cercle ABC. Donc :

Pour chaque sécante Δ *du cercle* ABC, *qui ne passe pas par le centre, on a*

$$p \cot P + q \cot Q + r \cot R = \pm 1,$$

où l'on doit prendre les signes + ou —, suivant que le point M est intérieur ou extérieur au cercle.

Si, enfin, la droite Δ *passe par le centre du cercle* ABC, *on a*

$$p \cot P + q \cot Q + r \cot R = 0.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

379. — Rendre calculables par logarithmes les quantités suivantes :

1° $\sin a \sin(b - c) \operatorname{tg} a + \sin b \sin(c - a) \operatorname{tg} b + \sin c \sin(a - b) \operatorname{tg} c$;

2° $\cos a \sin(b - c) \operatorname{ctg} a + \cos b \sin(c - a) \operatorname{ctg} b + \cos c \sin(a - b) \operatorname{ctg} c$.

(B. Sollertinsky.)

380. — Deux cercles égaux A, B sont tangents extérieurement. Par le point de contact E, on mène une transversale, qui coupe A, en C; B, en D. Sur CD, comme diamètre, on décrit une circonférence qui coupe le cercle B en H. Démontrer que le rayon ρ du cercle inscrit à la figure formée par les arcs EC, CH, HE, est donné par la formule

$$\rho = \frac{2r \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos \alpha},$$

dans laquelle r désigne le rayon des cercles proposés, α l'angle que la sécante CD fait avec la ligne des centres.

(G. Russo.)

Le Directeur-gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 25648-11-90.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Mélanges et correspondance.

Bibliographie.

Questions proposées.

351 à 380.

Questions résolues.

350, 225, 302, 287, 304, 289, 295, 296, 297, 298, 299, 301, 305, 307, 306, 308, 310, 309, 311, 312, 313, 319, 316, 317, 320, 321, 325, 326, 330, 332, 303, 327, 333, 334, 335, 336, 340, 341, 342, 314, 315, 323, 344, 347, 322, 329, 318

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS